TD11

Probabilités sur un univers fini

Espaces probabilisables finis

Exercice 1

On tire deux cartes dans un jeu de 32 cartes. On note A l'événement "les deux cartes tirées sont rouges", B l'événement "les deux cartes tirées sont un valet et un dix" et C l'événement "les deux cartes tirées sont des têtes".

1. Que représente les événements $\overline{A}$, $A \cap B \cap \overline{C}$, $(A \cap \overline{C}) \cap (B \cap \overline{C})$ et $(A \cap B) \cap C$?
2. Soient F l'événement "les deux cartes tirées sont des têtes et ne sont pas toutes les deux rouges" et G l'événement "on obtient au plus une tête". Écrire F et G à l'aide des événements A, B, C.

Exercice 2

Dans une boite, il y a quatre jetons numérotés de 1 à 4. On tire successivement au hasard et sans remise deux jetons.

1. Donner l'univers des possibles Ω associé à cette expérience aléatoire.
2. On note A l'événement "les deux jetons sont pairs". Écrire les ensembles correspondant aux événements A, $\overline{A}$, $A \cup \overline{A}$, $A \cap \overline{A}$.
3. On considère l'événement B "la somme des chiffres notés sur les deux jetons est paire". Écrire les ensembles correspondant aux événements $\overline{B}$, $A \cup B$, $A \cap B$, $A \cup \overline{B}$ et $A \cap \overline{B}$.

Exercice 3

Une urne contient une boule rouge, deux boules blanches et trois boules jaunes.

1. On effectue deux tirages successifs avec remise. On note R_1 (respectivement R_2) l'événement "le premier (respectivement second) tirage amène une boule de couleur rouge" et B_1 (respectivement B_2) l'événement "le premier (respectivement second) tirage amène une boule de couleur blanche".
   (a) Les événements R_1 et R_2 sont-ils incompatibles ?
   (b) Les événements R_1 et B_1 sont-ils incompatibles ?
   (c) Les événements R_1 et B_2 sont-ils incompatibles ?
2. Mêmes questions dans le cas où on tire deux boules sans remise.

Exercice 4

Alice et Bruno lancent chacun un dé. Le gagnant est celui qui fait le plus grand nombre. On note A l'événement "Alice gagne la partie" et B l'événement "Bruno gagne la partie".

1. Donner l'univers des possibles Ω associé à cette expérience aléatoire.
2. Écrire les ensembles correspondant aux événements A et B. A et B sont-ils incompatibles ?
3. Définir un événement C pour que (A, B, C) soit un système complet d'événements.

Exercice 5

Un joueur A dispose d'une pièce. Pour tout entier naturel n, on note P_n l'événement "le n-ième lancer de la pièce donne Pile" et F_n l'événement "le n-ième lancer de la pièce donne Face".

1. On suppose que le joueur A lance 4 fois la pièce. A l'aide des événements $(P_n)_{n\geq 1}$ et $(F_n)_{n\geq 1}$, exprimer les événements suivants :
   (a) "Obtenir au moins trois Piles",
   (b) "Obtenir au moins deux Faces successifs",
   (c) "Chaque fois que cela est possible, Face est suivi d'un Pile",
   (d) "Chaque fois que cela est possible, Face est suivi d'un Face".

2. Un second joueur B joue avec A au jeu suivant : le joueur A lance la pièce. S'il obtient Pile, il gagne et le jeu s'arrête. Sinon, le joueur B lance la pièce. S'il obtient Face, il gagne et le jeu s'arrête. Sinon, le joueur A lance la pièce. S'il obtient Pile, il gagne, etc.

   Pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, on note A_{2k+1} l'évènement "le joueur A gagne au $(2k+1)$-ième lancer de la pièce" et B_{2k+2} l'évènement "le joueur B gagne au $(2k+2)$-ième lancer de la pièce".

   (a) Exprimer à l'aide des $(P_n)_{n\geq 1}$ et $(F_n)_{n\geq 1}$ les évènements $A_1, B_2, A_3, B_4, A_5, B_6$ puis, pour tout entier naturel k, les évènements A_{2k+1} et B_{2k+2}.
   (b) On suppose en outre que chaque joueur ne peut faire plus de cinq lancers de pièces. A l'aide des évènements $(A_{2k+1})_{k\geq 0}$ et $(B_{2k+2})_{k\geq 0}$, exprimer les évènements suivants :
      i. "Le joueur A gagne en lançant au plus 3 fois la pièce",
      ii. "Il faut au moins 3 lancers à B pour gagner",
      iii. "Un des joueurs gagne avant le quatrième lancer de la pièce",
      iv. "Le joueur A gagne le jeu",
      v. "Aucun joueur ne gagne le jeu",
      vi. "Un joueur gagne le jeu".

Espaces probabilisés finis

Exercice 6

Un dé a été truqué de telle sorte que la probabilité de sortie du 6 soit le triple de la probabilité de sortie du 1. Les numéros 1, 2, 3, 4 et 5 ont la même probabilité de sortie.

1. Quelle est la probabilité de sortie de chaque numéro ?

2. Calculer la probabilité de l'événement A : "obtenir un numéro pair".

Exercice 7

On tire simultanément trois cartes d'un jeu de 32 cartes (tirages sans remise, pas de considération d'ordre).

1. Déterminer la probabilité d'obtenir exactement 2 rois.

2. Déterminer la probabilité d'obtenir au moins un coeur.

3. Quelle est la probabilité que l'on obtienne 3 cartes de même hauteur ?

4. Déterminer la probabilité d'obtenir exactement 3 trèfles dont la dame de trèfle.

Exercice 8

Un tiroir contient 10 paires de chaussettes toutes différentes. On pioche au hasard 4 chaussettes.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une paire complète ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir deux paires ?

Exercice 9

Une urne contient 3 jetons numérotés de 1 à 3. On effectue n tirages successifs avec remise. On note p_n la probabilité que les trois chiffres 1, 2 et 3 apparaissent au moins une fois lors des n lancers.
Pour tout $k \in \{1, 2, 3\}$, on note A_k l'événement "le numéro k n'apparait pas durant les n tirages".

1. Calculer $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3)$.
2. En déduire que la valeur de p_n puis $\lim_{n \to +\infty} p_n$. Interpréter ce résultat.

Exercice 10

On lance un dé à six faces parfaitement équilibré. On considère les événements A : "on obtient le tirage 2, 4 ou 6" et B : "on obtient le tirage 3 ou 6".
Les événements A et B sont-ils incompatibles ? indépendants ?

Exercice 11

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé fini avec $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ et la probabilité P définie (partiellement, x et y étant à déterminer) par $P(\{\omega_1\}) = \dfrac{1}{2}$, $P(\{\omega_2\}) = \dfrac{1}{4}$, $P(\{\omega_3\}) = x$ et $P(\{\omega_4\}) = y$.
Soient les événements $A = \{\omega_1, \omega_2\}$ et $B = \{\omega_2, \omega_3\}$.

1. Combien d'événements pouvons-nous considérer dans cet exemple?
2. On donne $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = \dfrac{1}{8}$. Déterminer complètement la probabilité P.
3. Les événements $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont-ils incompatibles ? indépendants ?

Exercice 12

Lors d'une épreuve, deux candidats doivent tirer sur une cible située à 20m et une cible située à 50m. Ils effectuent trois tirs chacun en changeant de cible à chaque fois. La probabilité d'atteindre la cible à 20 m (resp. 50 m) est p (resp. q) avec $q < p$. On suppose que les tirs indépendants. Ils gagnent le jeu s'ils atteignent deux cibles consécutivement.
Le joueur A décide de commencer sa série de trois tires par la cible située à 20m. Le joueur B choisit de commencer par la cible située à 50m.

1. Calculer la probabilité de gagner pour chacun des joueurs.
2. Quel joueur a le plus de chance de gagner l'épreuve ?

Exercice 13

Une urne contient 2 boules vertes et 3 boules rouges. On effectue 3 tirages successifs avec remise.
On note V_1 l'événement "la première boule tirée est de couleur verte". On note de façon analogue les autres événements liés à une couleur et à un tirage.

1. Calculer la probabilité que le résultat soit unicolore.

2. Calculer la probabilité que le résultat soit bicolore.

3. Calculer la probabilité d'obtenir 1 boule verte et 2 rouges dans un ordre quelconque.

Exercice 14

On considère une suite de n lancers consécutifs d'une pièce pour laquelle la probabilité d'obtenir Pile est p et celle d'obtenir Face est $q = 1 - p$ ($p \in]0, 1[$). Pile (resp. Face) sera noté P (resp. F).

1. Soit A_n l'événement "la séquence FP n'apparait jamais au cours des n lancers".
   Calculer $P(A_n)$ lorsque $n = 3, 4, 5$ puis pour n quelconque.

2. Soit B_n l'évènement "la séquence PF apparait pour la première fois aux lancers $(n - 1)$ et n".
   Calculer $P(B_n)$ lorsque $n = 3, 4, 5$ puis pour n quelconque.

Exercice 15

Dans un jeu de 32 cartes, on tire successivement 5 cartes avec remise à chaque tirage. On introduit les événements A_k : "obtenir un as à la k-ième pioche" et N_k : "obtenir n'importe quelle carte à la k-ième pioche". Pour ne pas alourdir les notations, on convient de noter A_k sous la forme A (respectivement N_k par N) en tenant compte que de la position de A. Par exemple, $AA\overline{A}\overline{A}\overline{A}$ signifie $A_1 \cap A_2 \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_4} \cap \overline{A_5}$.

1. (a) Exprimer les événements B_k : "obtenir le premier as à la k-ième pioche" et B : "ne pas obtenir d'as en 5 pioches" à l'aide des événements A_k et N_k.
   (b) En déduire $P(B_1)$, $P(B_2)$, $P(B_3)$, $P(B_4)$, $P(B_5)$ et $P(B)$.

2. Refaire la question précédente avec le second as.

Conditionnement

Exercice 16

Une urne contient initialement 7 boules noires et 3 boules blanches. On tire successivement 3 boules : si on tire une boule noire, on l'enlève, si on tire une boule blanche, on la retire et on ajoute une boule noire à la place.

On note N_1 l'événement "la première boule tirée est de couleur noire". On note de façon analogue les autres événements liés à une couleur et à un tirage.

1. Quelle est la probabilité de tirer 3 boules blanches à la suite ?

2. Quelle est la probabilité de tirer 3 boules de la même couleur ?

Exercice 17

Trois urnes contiennent respectivement deux boules rouges et une boule verte, deux boules vertes et une boule noire, deux boules noires et une boule rouge. On tire au hasard une boule dans la première urne et on la met dans la deuxième, puis on tire une boule dans la deuxième urne et on la met dans la troisième et enfin on tire une boule dans cette troisième urne.

On note R_1 l'événement "la première boule tirée est de couleur rouge". On note de façon analogue les autres événements liés à une couleur et à un tirage.

1. Quelle est la probabilité de tirer trois boules rouges ?

2. Quelle est la probabilité de tirer trois boules de couleurs différentes ?

Exercice 18
Deux urnes contiennent respectivement quatre boules rouges, une boule jaune et trois boules vertes pour la première, quatre boules rouges et deux boules vertes pour la seconde. On tire au hasard une boule dans la première urne. Si elle est rouge, on la laisse de côté et on procède à un second tirage dans la même urne. Sinon, on la met dans la seconde urne et on y effectue le second tirage.
On note R_1 l'événement "la première boule tirée est de couleur rouge". On note de façon analogue les autres événements liés à une couleur et à un tirage.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir deux boules rouges ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule de couleur verte au second tirage ?

Exercice 19
Dans un magasin, des machines proviennent de deux usines différentes A et B (70% viennent de A et 30% viennent de B). Parmi celles qui viennent de A, 20% présentent un défaut. Parmi celles qui viennent de B, 10% présentent un défaut.

1. Déterminer le pourcentage de machines dans le magasin présentant un défaut.
2. Une machine donnée présente un défaut.

   Quelle est la probabilité qu'elle provienne de l'usine B ?

Exercice 20
Un lot de 100 dés contient 25 dés pipés tels que la probabilité d'obtenir 6 en les lançant est $\frac{1}{2}$ et que les probabilités d'obtenir 1, 2, 3, 4 ou 5 sont égales. On prend un dé au hasard et on le lance.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir un 6 ?
2. On obtient 6. Quelle est la probabilité pour que ce dé soit pipé ?
3. On obtient 2. Quelle est la probabilité pour que ce dé ne soit pas pipé ?

Exercice 21
On dispose de n urnes ($n \geq 2$), numérotées de 1 à n, et telles que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, l'urne numérotée par k contient k boules blanches et $(n-k)$ boules noires. On choisit au hasard une urne et on en extrait une boule. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on note U_k l'événement "l'urne numérotée k a été choisie".

1. Déterminer la probabilité de l'événement B "on obtient une boule blanche".
2. On constate que la boule tirée est blanche. Déterminer la probabilité que cette boule provienne de l'urne numéro 1.

Exercice 22
On dispose de deux dés cubiques D_1 et D_2 parfaitement équilibrés. D_1 possède quatre faces rouges et deux faces blanches; D_2 possède deux faces rouges et quatre faces blanches. On lance une pièce de monnaie telle que la probabilité d'obtenir pile soit égale à $\frac{1}{3}$. Si on obtient pile, on décide de jouer uniquement avec D_1. Dans le cas contraire, on décide de jouer uniquement avec D_2.

1. Calculer la probabilité que le premier lancer de dé amène la couleur rouge.
2. On a obtenu rouge aux deux premiers lancers de dé.

   Calculer la probabilité d'obtenir encore rouge au lancer suivant.

3. On a obtenu rouge aux n premiers lancers ($n \in \mathbb{N}^*$).
   (a) Déterminer la probabilité p_n d'avoir effectué ces lancers avec le dé D_1.
   (b) Calculer $\lim_{n \to +\infty} p_n$. Comment peut-on interpréter ce résultat ?

Processus de Markov

Un processus de Markov est une suite d'expériences aléatoires où la distribution conditionnelle de probabilités des états futurs ne dépend que de l'état présent et non des états passés. On parle de processus sans mémoire. En d'autres termes, pour de tels processus, si on connait le présent, la connaissance du passé n'apporte pas d'information supplémentaire utile pour la prédiction du futur.

Exercice 23

Une compagnie aérienne étudie la réservation sur l'un de ses vols. Une place donnée est libre le jour d'ouverture de la réservation et son état évolue chaque jour jusqu'à la fermeture de la réservation de la manière suivante :

- Si la place est réservée le jour n, elle le sera encore le jour $n+1$ avec la probabilité $\frac{9}{10}$.
- Si la place est libre le jour n, elle sera réservée le jour $n+1$ avec la probabilité $\frac{4}{10}$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note R_n l'événement : "la place est réservée le jour n" et $r_n = P(R_n)$ sa probabilité. On suppose que $r_0 = 0$.

1. Exprimer r_{n+1} en fonction de r_n.
2. En déduire l'expression explicite de r_n en fonction de n et calculer $\lim_{n \to +\infty} r_n$.

Exercice 24

Deux urnes U_1 et U_2 contiennent des boules blanches et noires. L'urne U_1 contient 3 boules blanches et 2 boules noires, l'urne U_2 contient 1 boule blanche et 4 boules noires.
On effectue un premier tirage dans une urne choisie au hasard et on remet la boule obtenue dans son urne d'origine. Si l'on obtient une boule blanche (resp. noire), le 2-ième tirage se fait dans U_1 (resp. U_2). Au i-ième tirage, si la boule obtenue est blanche (resp. noire), le $(i+1)$-ième tirage se fait dans U_1 (resp. U_2).
Soit B_i l'évènement "on obtient une boule blanche au i-ième tirage".

1. Calculer $P(B_1)$ et $P(B_2)$.
2. Exprimer $P(B_{n+1})$ en fonction de $P(B_n)$.
3. Montrer que la suite $P(B_n)$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 25

Une boite A contient deux jetons portant le numéro 0 et une boite B contient deux jetons portant le numéro 1. On tire au hasard un jeton dans chaque boite et on les échange. On recommence cette opération n fois. On s'intéresse à la somme des jetons contenus dans l'urne A à l'instant $t = n$.
Pour cela, on introduit les évènements :

- P_n : "la somme des jetons contenus dans l'urne A à l'instant $t = n$ vaut 0",
- Q_n : "la somme des jetons contenus dans l'urne A à l'instant $t = n$ vaut 1",
- R_n : "la somme des jetons contenus dans l'urne A à l'instant $t = n$ vaut 2".

On pose également $p_n = P(P_n)$, $q_n = P(Q_n)$ et $r_n = P(R_n)$.

1. Calculer p_0, q_0, r_0, p_1, q_1, r_1, p_2, q_2, r_2.
2. Exprimer p_{n+1} (resp. q_{n+1}, resp. r_{n+1}) en fonction de p_n, q_n, r_n.
3. Montrer que : $\forall n \geq 0$, $q_{n+2} = \frac{1}{2}q_{n+1} + \frac{1}{2}q_n$.
4. En déduire l'expression de q_n en fonction de n puis celle de p_n et de r_n.
5. Déterminer les limites des trois suites.

Exercice 26

Deux bourses U et V contiennent respectivement deux pièces d'or et trois d'argent, quatre d'or et une d'argent. On tire une pièce de l'une des bourses choisie au hasard et on la remet dans cette même bourse. Si la pièce tirée est en or, on recommence le tirage (toujours avec remise) dans la même bourse. Dans le cas contraire, on recommence le tirage (toujours avec remise) dans l'autre bourse. On applique cette règle à chaque tirage à partir du deuxième tirage.

1. Déterminer les probabilités pour que :
   (a) les trois premiers tirages soient faits dans la bourse U;
   (b) le deuxième tirage se fasse dans la bourse U;
   (c) on tire une pièce d'argent au deuxième tirage;
   (d) le deuxième tirage ait été fait dans la bourse U sachant que l'on a tiré une pièce d'or à ce deuxième tirage.
2. Soit n un entier naturel et non nul. On note u_n la probabilité de l'événement U_n : "le n-ième tirage s'effectue dans la bourse U".
   (a) Déterminer une relation entre u_{n+1} et u_n.
   (b) En déduire l'expression de u_n en fonction de n.
   (c) Calculer la probabilité d'obtenir de l'or au tirage numéro n.

Exercice 27

Considérons les matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \frac{1}{4}A$ et $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. (a) Déterminer des matrices P et Q telles que $P + Q = I_3$ et $2P + 4Q = A$.
   (b) Calculer PQ, QP, P^2 et Q^2.
   (c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer P^n et Q^n.
   (d) En déduire A^n puis B^n en fonction des matrices P et Q et de l'entier n.
2. On dispose de trois urnes de trois couleurs différentes contenant chacune quatre boules : une urne blanche qui contient trois boules blanches et une boule verte, une urne rouge qui contient une boule blanche, deux boules rouges et une boule verte et une urne verte contient une boule blanche et trois boules vertes.

   On effectue alors une suite de tirages selon les règles suivantes :

   - Après chaque tirage dans une urne, la boule tirée est remise dans la même urne.
   - Le premier tirage a lieu dans l'une des trois urnes prises au hasard.

- Pour tout entier naturel non nul n, le $(n+1)$-ième tirage a lieu dans l'urne de la couleur de la boule tirée lors du n-ième tirage.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n (respectivement R_n, V_n) l'événement "le n-ième tirage a lieu dans l'urne blanche (respectivement rouge, verte)" et on note aussi $X_n = \begin{pmatrix} P(B_n) \\ P(R_n) \\ P(V_n) \end{pmatrix}$.

(a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer $P(B_{n+1})$, $P(R_{n+1})$, $P(V_{n+1})$ en fonction de $P(B_n)$, $P(R_n)$, $P(V_n)$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $X_{n+1} = BX_n$.

(c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n = B^{n-1}X_1$.

(d) En déduire les expressions de $P(B_n)$, $P(R_n)$ et $P(V_n)$ en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$.

(e) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} P(B_n)$, $\lim\limits_{n\to+\infty} P(R_n)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} P(V_n)$.

Exercice 28

Un distributeur de jouets distingue trois catégories de jouets : les jouets traditionnels (poupées, peluches...), les jouets à la mode (inspirés directement d'un livre, d'un film, d'une émission) et les jouets scientifiques (vulgarisant une technique récente). Il estime que :

- Le client qui a acheté un jouet traditionnel une année pour Noël choisira, l'année suivante, un jouet à la mode.
- Le client qui a acheté un jouet inspiré par la mode optera l'année suivante pour un jouet traditionnel avec la probabilité $\frac{1}{4}$, pour un jouet à la mode avec la probabilité $\frac{1}{2}$ et pour un jouet scientifique avec la probabilité $\frac{1}{4}$.
- Le client qui a acheté un jouet scientifique se décidera l'année suivante pour un jouet à la mode.

Soit T_n (resp. M_n, S_n) l'événement "le client a acheté un jouet traditionnel (resp. à la mode, scientifique) le n-ième Noël". On note $t_n = P(T_n)$, $m_n = P(M_n)$ et $s_n = P(S_n)$ et on estime que $t_0 = 0$, $m_0 = 1$ et $s_0 = 0$. Enfin, on pose $X_n = \begin{pmatrix} t_n \\ m_n \\ s_n \end{pmatrix}$.

1. (a) Montrer que X_{n+1} s'exprime en fonction de X_n au moyen d'une matrice A que l'on formera.

   (b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$.

2. (a) Soit $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.

   (b) On pose $D =$diag$(0, -\frac{1}{2}, 1)$. Calculer PDP^{-1} en fonction de A.

   (c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $A^n = PD^nP^{-1}$.

   (d) Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer A^n en fonction de n.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer t_n, m_n et s_n en fonction de n.

4. Quelles parts à long terme les trois catégories de jouets représenteront-elles dans la vente si l'attitude des consommateurs reste constante ?