TD13

Variables aléatoires finies

Variables aléatoires finies

Exercice 1

On considère une variable aléatoire X définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$. On donne :

$$X(\Omega) = [\![0, 4]\!],\ P(X = 0) = \frac{1}{10},\ P(X = 1) = \frac{1}{4} \text{ et } P(X = 2) = \frac{1}{2}.$$

1. Sachant que les événements $(X = 3)$ et $(X = 4)$ sont équiprobables, déterminer $P(X = 3)$.
2. Calculer l'espérance et la variance de X.
3. Déterminer une expression de la fonction de répartition F_X de X et tracer sa courbe représentative.

Exercice 2

Soit une variable aléatoire discrète X définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$, de fonction de répartition F_X et dont la loi est donnée par :

$$X(\Omega) = \{-1, 0, 2\},\ P(X = -1) = \frac{1}{6},\ P(X = 0) = \frac{1}{3} \text{ et } P(X = 2) = \frac{1}{2}.$$

1. Déterminer l'expression de la fonction de répartition F_X de X et tracer sa courbe représentative.
2. Calculer l'espérance et la variance de X.
3. On pose $Y = 2X - 1$, $Z = X^2$ et $T = |X|$ et on admet que Y, Z et T sont aussi des variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$.

   Déterminer la loi des variables aléatoires Y, Z et T.

Exercice 3

On pioche successivement deux boules, sans remettre la première boule, dans une urne contenant 5 boules numérotées de 1 à 5. On note X la variable aléatoire égale à la valeur absolue de la différence des deux numéros obtenus.

1. Donner la loi de X.
2. Calculer l'espérance et la variance de X.
3. En déduire $E(2X + 1)$ et $V(2X + 1)$.

Exercice 4

On considère un dé à quatre faces numérotées de 1 à 4 tel que la probabilité d'apparition de chacune des faces lors d'un lancer est proportionnelle au numéro qu'elle porte. On lance ce dé et on note X la variable aléatoire égale au numéro obtenu.

1. Déterminer la loi de X et sa fonction de répartition.
2. Calculer l'espérance et la variance de X.
3. Déterminer $E\left(\frac{1}{X}\right)$.

Exercice 5

On tire simultanément deux boules au hasard d'une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. On appelle X la variable aléatoire égale au plus grand des numéros obtenus.

1. Déterminer la fonction de répartition F_X de la variable aléatoire X.
2. En déduire la loi de X.
3. Calculer l'espérance de X.

Exercice 6

Une urne contient trois boules numérotées $1, 2, 3$.

1. On en tire n une à une et avec remise. Soit X la variable aléatoire égale au plus petit des nombres obtenus et Y la variable aléatoire égale au plus grand.
   (a) Calculer $P(X \geq i)$ pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$. En déduire la loi de X.
   (b) Calculer $P(Y \leq j)$ pour tout $j \in \{1, 2, 3\}$. En déduire la loi de Y.
   (c) Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
2. On effectue des tirages successifs d'une boule avec remise, jusqu'à obtenir pour la première fois un numéro déjà tiré. On note alors Z la variable aléatoire égale au rang de ce dernier tirage.
   (a) Déterminer la loi de Z.
   (b) Calculer l'espérance et la variance de Z.

Exercice 7

On tire simultanément r jetons d'une urne contenant n jetons numérotés de 1 à n (avec $r \leq n$). On note $X_{n,r}$ la variable aléatoire égale au maximum des r numéros obtenus.

1. Déterminer la loi de $X_{n,r}$ pour n et r quelconques avec $1 \leq r \leq n$.
2. En déduire la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{k=r}^{n} \binom{k-1}{r-1}$.
3. Vérifier que $r\binom{k}{r} = k\binom{k-1}{r-1}$. En déduire l'espérance de $X_{n,r}$.

Exercice 8

Un sac contient n jetons ($n \geq 17$) dont cinq rouges et dix blancs, les autres étant verts.
Un joueur tire un jeton au hasard. S'il est rouge, il gagne 5 euros. S'il est blanc, il perd 3 euros. Et s'il est vert, il procède à un second tirage sans remettre le premier jeton.
Si le second tirage amène un jeton rouge, il gagne 4 euros. S'il est blanc, il perd 1 euro. Et s'il est encore vert, la partie est nulle et s'arrête.
Soit X la variable aléatoire associée au gain algébrique du joueur.

1. Établir, en fonction de n, la loi de probabilité de X.
2. Calculer $E(X)$.
3. En déduire la valeur de n pour laquelle le jeu est équitable.

Exercice 9

On considère le jeu suivant : le joueur paie 3 euros pour jouer. Ensuite, il lance trois fois de suite une pièce équilibrée. Pour chaque "pile" qu'il obtient, il gagne 2 euros.
On désigne par X la variable aléatoire égale le nombre de "pile" obtenus et par Y la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

1. Exprimer Y en fonction de X.
2. Donner la loi de X puis calculer $E(X)$ et $V(X)$.
3. Déterminer $E(Y)$ et $V(Y)$. Le joueur est-il gagnant en moyenne ?
4. Expliciter la loi de Y.

Exercice 10

Une urne contient 2 boules blanches et $(n-2)$ boules rouges $(n \geq 2)$. On tire les boules une à une sans remise jusqu'à l'obtention de la première boule blanche.
On note B_i (resp. R_i) l'événement "obtenir une boule blanche (resp. rouge) au i-ième tirage".
On appelle X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule blanche et Y la variable aléatoire égale au nombre de boules restant dans l'urne à la fin de l'expérience.

1. Déterminer $X(\Omega)$.
2. Soit $k \in X(\Omega)$.
   (a) Exprimer l'événement $(X=k)$ à l'aide des événements B_i et R_i.
   (b) En déduire que : $P(X=k) = \dfrac{2(n-k)}{n(n-1)}$.
3. Montrer que : $E(X) = \dfrac{n+1}{3}$.
4. (a) Exprimer Y en fonction de X.
   (b) En déduire l'expression de $E(Y)$ en fonction de n.

Exercice 11

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dispose d'une pièce dont la probabilité de faire "pile" est $p \in]0,1[$ et de $(n+1)$ urnes numérotées de 0 à n.
Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, l'urne numéro k contient k boules vertes et $(n-k)$ boules rouges.
On considère l'expérience suivante : on lance n fois la pièce, puis on pioche une unique boule dans l'urne dont le numéro correspond au nombre de fois où "pile" a été obtenu. Par exemple, si on a obtenu quatre "piles" au cours de ces n lancers, on pioche dans l'urne numéro 4.
On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de "piles"obtenues lors des n lancers et Y la variable aléatoire qui vaut 1 si l'on tire une boule verte et 0 sinon.

1. (a) Déterminer la loi de X.
   (b) Calculer $E(X)$.
2. (a) Calculer $P_{(X=0)}(Y=0)$ et $P_{(X=n)}(Y=0)$. X et Y sont-elles indépendantes ?
   (b) Déterminer, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $P_{(X=k)}(Y=1)$.
   (c) En déduire, en utilisant le système complet d'événements $(X=k)_{k\in[\![0,n]\!]}$, que :

$$P(Y=1) = \frac{E(X)}{n}.$$

(d) En déduire la loi de Y et son espérance.

Exercice 12
Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Un joueur lance une pièce équilibrée indéfiniment. On note X_n la variable aléatoire égale au nombre de fois où, au cours des n premiers lancers, deux résultats successifs ont été différents. On dit que X_n est le nombre de changements au cours des n premiers lancers. Par exemple, si les 9 premiers lancers ont donné successivement :

Pile , Pile , Face , Pile , Face , Face , Face , Pile , Pile

alors la variable X_9 aura pris la valeur 4 (car il y a eu 4 changements, aux 3-ième, au 4-ième, au 5-ième et au 8-ième lancers).
L'objectif de cet exercice est de déterminer l'espérance $E(X_n)$ de X_n en fonction de n.

1. Justifier que $X_n(\Omega) = \{0, \dots, n-1\}$.
2. (a) Déterminer la loi de X_2 et son espérance.
   (b) Déterminer la loi de X_3 et son espérance.
3. On considère la variable aléatoire $Y_n = X_{n+1} - X_n$.
   (a) Justifier que $Y_n(\Omega) = \{0, 1\}$.
   (b) Montrer que :
   $$P(Y_n = 0) = \sum_{k=0}^{n-1} P(X_n = k) \times P_{(X_n=k)}(Y_n = 0).$$
   (c) Justifier que pour tout entier $k \in \{0, \dots, n-1\}$: $P_{(X_n=k)}(Y_n = 0) = \dfrac{1}{2}$.
   (d) En déduire $P(Y_n = 0)$, puis $P(Y_n = 1)$.
   (e) Calculer $E(Y_n)$.
4. (a) Déduire de la question précédente la relation : $E(X_{n+1}) = E(X_n) + \dfrac{1}{2}$.
   (b) Donner $E(X_n)$ en fonction de n.

Chaînes de Markov

Une chaîne de Markov est une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que la loi conditionnelle de X_{n+1} sachant le passé, c'est-à-dire sachant $(X_k)_{0\leq k\leq n}$, est une fonction de X_n seulement. En d'autres termes, la prédiction du futur ne dépend que de l'état présent et non des états passés.

Exercice 13
Les sommets d'un carré sont numérotés $1, 2, 3$ et 4. Un pion se déplace aléatoirement sur les sommets de ce carré selon le protocole suivant :

- Au départ, le pion est sur le sommet 1.
- Lorsque le pion est à un instant donné sur un sommet, il se déplace à l'instant suivant sur l'un quelconque des trois autres sommets, et ceci de façon équiprobable.

  Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note X_n la variable aléatoire égale au numéro du sommet sur lequel se situe le pion à l'instant n.

1. (a) Utiliser la formule des probabilités totales pour établir que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :
   $$P(X_{n+1} = 1) = \frac{1}{3}P(X_n = 2) + \frac{1}{3}P(X_n = 3) + \frac{1}{3}P(X_n = 4).$$

(b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$P(X_{n+1} = 1) = -\frac{1}{3}P(X_n = 1) + \frac{1}{3}.$$

(c) Donner alors la valeur de $P(X_n = 1)$ en fonction de n.

2. En procédant de la même manière qu'à la question précédente, donner la valeur de $P(X_n = 2)$, $P(X_n = 3)$ et de $P(X_n = 4)$ en fonction de n.

3. Déterminer l'espérance de X_n.

Exercice 14

Un mobile se déplace aléatoirement par "sauts" sur les points de coordonnées entières d'un axe d'origine O (d'abscisse égale à 0).
A l'instant 0, il est en O. A chaque instant, il se déplace aléatoirement en faisant un pas à gauche ou à droite avec une probabilité $\frac{1}{2}$.
On note X_n la variable aléatoire égale à l'abscisse du mobile à l'instant n.

1. Déterminer $X_n(\Omega)$.
2. Calculer $P(X_n = n)$ en fonction de n.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $Z_n = X_{n+1} - X_n$. Que représente Z_n ?
4. Déterminer la loi et l'espérance de Z_n.
5. En déduire que, pour tout entier naturel n, $E(X_{n+1}) = E(X_n)$.
6. Donner la valeur de $E(X_n)$. Commenter.

Exercice 15

Un mobile se déplace aléatoirement par "sauts" sur les points à coordonnées entières et positives ou nulles d'un axe d'origine O (d'abscisse égale à 0). Le voyage est organisé comme suit :

- Le mobile est en O à l'instant 0.
- Si le mobile est sur le point d'abscisse k ($k \in \mathbb{N}$) à l'instant n ($n \in \mathbb{N}$), alors à l'instant $n+1$, il sera, soit sur le point d'abscisse $(k+1)$ avec la probabilité $\frac{2}{3}$, soit en O avec la probabilité $\frac{1}{3}$.

On appelle X_n la variable aléatoire égale à l'abscisse du mobile à l'instant n. On a donc $X_0 = 0$.

1. Donner la loi de X_1.
2. Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $X_n(\Omega) = [\![0, n]\!]$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) En considérant le système complet d'événements $(X_{n-1} = i)_{0 \leq i \leq n-1}$, déterminer la valeur de la probabilité $P(X_n = 0)$.
   (b) Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Toujours avec le même système complet d'événements $(X_{n-1} = i)_{i \in [\![0, n-1]\!]}$, montrer que :
   $$P(X_n = k) = \frac{2}{3}P(X_{n-1} = k-1).$$
4. (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ E(X_n) = \frac{2}{3}E(X_{n-1}) + \frac{2}{3}.$

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer $E(X_n)$ en fonction de n.

Exercice 16

Une urne contient initialement une boule blanche et une boule rouge.
On effectue des tirages successifs d'une boule dans l'urne selon le protocole suivant : après chaque tirage, la boule tirée est remise dans l'urne puis on rajoute dans l'urne, avant le tirage suivant, une boule de la couleur de la boule que l'on vient de tirée.
Pour tout entier naturel n, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boule blanche obtenues au cours des n tirages. Par exemple, pour $n = 3$ si l'on a obtenue au premier tirage une boule blanche et aux deux autres tirages une boule rouge alors $X_3 = 1$.
Enfin, pour tout entier $k \geq 1$, on pose B_k (resp. R_k) l'événement : "obtenir une boule blanche (resp. rouge) à la k-ième pioche".

1. Loi de X_2
   (a) Pour $k \in \{0, 1, 2\}$, exprimer l'évènement $(X_2 = k)$ à l'aide d'évènements B_k et R_k.
   (b) Déterminer la loi, l'espérance et la variance de X_2.
2. Loi de X_3
   (a) Calculer $P(X_3 = 0)$ et $P(X_3 = 3)$.
   (b) Avec le système complet d'évènements $(X_2 = 0)$, $(X_2 = 1)$, $(X_2 = 2)$, calculer $P(X_3 = 1)$.
   (c) En déduire $P(X_3 = 2)$.
3. Loi de X_n lorsque $n \geq 2$
   (a) Expliciter $X_n(\Omega)$ et calculer $P(X_n = 0)$.
   (b) Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. En introduisant le système complet d'événements $(X_{n-1} = i)_{0 \leq i \leq n-1}$, montrer que :
   $$P(X_n = k) = P(X_{n-1} = k-1)P_{(X_{n-1}=k-1)}(X_n = k) + P(X_{n-1} = k)P_{(X_{n-1}=k)}(X_n = k)$$
   (c) Calculer soigneusement $P_{(X_{n-1}=k-1)}(X_n = k)$ et $P_{(X_{n-1}=k)}(X_n = k)$.
   (d) Montrer par récurrence sur $n \geq 2$ que : $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $P(X_n = k) = \dfrac{1}{n+1}$.
   (e) Donner l'espérance et la variance de X_n.

Exercice 17

Partie I

On considère les matrices suivantes :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que la matrice P est inversible et déterminer P^{-1}.
2. Montrer que la matrice D définie par $D = P^{-1}MP$ est diagonale.
3. En déduire que $M = PDP^{-1}$ puis que, pour tout entier naturel n, on a la relation :
   $$M^n = PD^nP^{-1}.$$
4. Expliciter alors les matrices D^n et M^n.

Partie II

Un individu se déplace sur les trois points A_0 d'abscisse 0, A_1 d'abscisse 1 et A_2 d'abscisse 2 selon les règles suivantes :

- A l'instant initial 0, il est au point d'abscisse 2.
- S'il est au point d'abscisse 2 à l'instant n, il est de façon équiprobable en l'un des trois points d'abscisse 0, 1 et 2 à l'instant $n+1$.
- S'il est au point d'abscisse 1 à l'instant n, il est de façon équiprobable en l'un des 2 points d'abscisse 0 ou 1 à l'instant $n+1$.
- S'il est au point d'abscisse 0 à l'instant n, il reste au point d'abscisse 0 à l'instant $n+1$.

Pour tout entier naturel n, on désigne par X_n la variable aléatoire indiquant l'abscisse du point où se trouve l'individu à l'instant n.

5. Exprimer les probabilités $P(X_{n+1}=0)$, $P(X_{n+1}=1)$ et $P(X_{n+1}=2)$ en fonction des probabilités $P(X_n=0)$, $P(X_n=1)$ et $P(X_n=2)$ à l'aide de la formule des probabilités totales.
6. En déduire que $U_{n+1}=MU_n$, où M est la matrice définie dans la première partie et U_n désigne la matrice colonne dont les éléments (de haut en bas) sont $P(X_n=0)$, $P(X_n=1)$ et $P(X_n=2)$.
7. (a) Exprimer le produit matriciel $(0\ 1\ 2)M$ en fonction de la matrice ligne $(0\ 1\ 2)$.
   (b) En multipliant à gauche par la matrice ligne $(0\ 1\ 2)$ l'égalité matricielle $U_{n+1}=MU_n$, exprimer $E(X_{n+1})$ en fonction de $E(X_n)$.
   (c) En déduire $E(X_n)$ en fonction de n et sa limite quand n tend vers $+\infty$.
8. (a) Préciser U_0 et montrer que pour tout entier n, $U_n=M^nU_0$.
   (b) En déduire $P(X_n=0)$, $P(X_n=1)$, $P(X_n=2)$ et leurs limites quand n tend vers $+\infty$. Retrouver à l'aide de ces résultats l'espérance $E(X_n)$ et sa limite quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 18

Partie I

On considère les matrices suivantes :

$$M=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&0&0\\2&2&0\\0&1&3\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P=\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&-1&0\\1&1&1\end{pmatrix}.$$

1. Calculer P^2. En déduire que P est inversible et expliciter son inverse.
2. Déterminer la matrice diagonale D telle que $M=PDP^{-1}$.
3. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a la relation : $M^n=PD^nP^{-1}$.
4. En déduire que, pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$M^n=\begin{pmatrix}\left(\frac{1}{3}\right)^n & 0 & 0\\ 2\left(\frac{2}{3}\right)^n-2\left(\frac{1}{3}\right)^n & \left(\frac{2}{3}\right)^n & 0\\ 1-2\left(\frac{2}{3}\right)^n+\left(\frac{1}{3}\right)^n & 1-\left(\frac{2}{3}\right)^n & 1\end{pmatrix}$$

Partie II
On considère dans cette partie un marché sur lequel 3 fournisseurs proposent des biens identiques à des consommateurs. Les commandes de ces derniers arrivent, successivement et de façon indépendantes, auprès de ces 3 fournisseurs, chacun d'eux étant choisi de façon équiprobable. Pour tout entier naturel non nul n, on désigne :

- par X_n la variable aléatoire indiquant le nombre de fournisseurs ayant reçu au moins une commande de l'un ou plusieurs des n premiers consommateurs.
- par U_n la matrice colonne suivante : $U_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 1) \\ P(X_n = 2) \\ P(X_n = 3) \end{pmatrix}$.

5. Étude de la loi des variables aléatoires X_n :
   (a) Déterminer les probabilités conditionnelles suivantes en justifiant soigneusement toutes vos réponses :
   $$\begin{array}{lll} P_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 1), & P_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 1), & P_{(X_n=3)}(X_{n+1} = 1), \\ P_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 2), & P_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 2), & P_{(X_n=3)}(X_{n+1} = 2), \\ P_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 3), & P_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 3), & P_{(X_n=3)}(X_{n+1} = 3). \end{array}$$
   (b) A l'aide de la formule des probabilités totales, en déduire l'expression de $P(X_{n+1} = 1)$ en fonction des probabilités $P(X_n = 1)$, $P(X_n = 2)$, $P(X_n = 3)$.
   Exprimer de même $P(X_{n+1} = 2)$ et $P(X_{n+1} = 3)$ en fonction de $P(X_n = 1)$, $P(X_n = 2)$, $P(X_n = 3)$.
   (c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Établir que $U_{n+1} = MU_n$ puis que $U_n = M^{n-1}U_1$.
   (d) Préciser U_1, puis calculer U_n en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$.
   (e) En déduire $E(X_n)$ en fonction de n, puis $\lim\limits_{n \to +\infty} E(X_n)$.
6. (a) On considère les matrices lignes L et J définies par $L = (1\ 2\ 3)$ et $J = (1\ 1\ 1)$.
      i. Déterminer deux réels α et β tels que $(*)$: $LM = \alpha L + \beta J$.
      ii. Calculer LU_n en fonction de $E(X_n)$ puis calculer JU_n.
      iii. En multipliant l'égalité $(*)$ par U_n à droite, en déduire que : $E(X_{n+1}) = \alpha E(X_n) + \beta$.
   (b) Préciser $E(X_1)$, puis retrouver l'expression de $E(X_n)$ en fonction de n.