TD14

Séries réelles

Exercice 1

Calculer les sommes suivantes après avoir justifié la convergence des séries :

$$A=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n!};\qquad B=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n!};\qquad C=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{3^n}{(n+1)!};$$

$$D=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3n-1}{n!};\qquad E=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n n^2}{3^n};\qquad F=\sum_{n=1}^{+\infty}e^{-n};$$

$$G=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{4n-1}{3^n};\qquad H=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2n^2-n+1}{n!};\qquad I=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^n n^2+(-1)^n n}{3^n}$$

$$J=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^2+2n+1}{2^n};\qquad K=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^2-n+3^n}{n!};\qquad L=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^2+2^n}{2^{2n}}$$

$$M=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1+2^n}{4^{n+1}};\qquad N=\sum_{n=0}^{+\infty}(n^2+n-1)e^{-2n};\qquad O=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^2+n-(-2)^n}{n!}$$

Exercice 2

Soit $u_n=\dfrac{n^2}{(n-1)!}$.

1. Déterminer $a,b,c\in\mathbb{R}$ tels que pour tout $n\geq 3$, $u_n=\dfrac{a}{(n-3)!}+\dfrac{b}{(n-2)!}+\dfrac{c}{(n-1)!}$.
2. En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}u_n$ converge et donner sa somme.

Exercice 3

1. Soit $p\in]0,1[$ et $q=1-p$. Montrer que les séries suivantes convergent et que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}pq^{n-1}=1,\qquad \sum_{n=1}^{+\infty}npq^{n-1}=\frac{1}{p},\qquad \sum_{n=1}^{+\infty}n^2pq^{n-1}=\frac{q+1}{p^2}.$$

2. Soit $\lambda\in\mathbb{R}$. Montrer que les séries suivantes convergent et que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}=1,\qquad \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}=\lambda,\qquad \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^2\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}=\lambda(\lambda+1).$$

Exercice 4

Considérons les trois suites suivantes :

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}},\quad b_n=\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right),\quad c_n=\ln\left(\frac{(n+1)(n+3)}{n(n+2)}\right),\quad d_n=\ln\left(1+\frac{2}{n(n+3)}\right).$$

1. (a) Écrire, pour tout entier naturel n non nul, a_n sous la forme $u_{n+1}-u_n$.
   (b) En déduire la nature de la série de terme général a_n et donner sa valeur si elle converge.
2. Reprendre les questions précédentes avec b_n, c_n puis d_n.

Exercice 5

1. Trouver deux réels a et b tels que : $\forall k \geq 1,\ \dfrac{k}{4k^2-1} = \dfrac{a}{2k+1} + \dfrac{b}{2k-1}$.
2. En déduire que la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^{n+1}n}{4n^2-1}$ converge et calculer sa somme.

Exercice 6

On considère la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

1. Déterminer des réels a, b et c tels que : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{1}{k(k+1)(k+2)} = \dfrac{a}{k} + \dfrac{b}{k+1} + \dfrac{c}{k+2}$.
2. Déterminer alors $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$ pour tout $n \geq 1$.
3. En déduire que la série converge et déterminer sa somme.

Exercice 7

Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la somme $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

1. Montrer que les suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.
2. En déduire que la série harmonique alternée $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ est convergente.

Exercice 8

Soit $x \in]0,1[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k$.

1. (a) Calculer $S_n(x)$.
   (b) En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} x^n$ converge et expliciter sa somme.
2. (a) Calculer de deux façons distinctes la dérivée $S_n'(x)$.
   (b) En déduire que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} kx^{k-1} = \frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(1-x)^2}$.
   (c) Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} nx^n$.
   (d) En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} nx^{n-1}$ converge et que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$.

Exercice 9

1. Démontrer les inégalités suivantes :

$$(i)\ \ \forall x \in \mathbb{R},\ e^x \geq x \qquad (ii)\ \ \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ x \geq \ln(x).$$

2. En déduire la nature des séries suivantes :

$$(i)\ \ \sum e^{-n^2} \qquad (ii)\ \ \sum \frac{1}{\ln(n)} \qquad (iii)\ \ \sum \frac{n+\ln(n)}{e^{n^3}}.$$

Exercice 10

On considère la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$. L'objectif de cet exercice est de démontrer que cette série est divergente.

1. Montrer que, pour tout entier $k \geq 1$, $2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) \leq \frac{1}{\sqrt{k}}$.
2. En déduire que, pour tout entier $n \geq 1$, $2(\sqrt{n+1} - 1) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.
3. Conclure.

Exercice 11

On considère la série $\sum \frac{1}{e^n + e^{-n}}$ et on note S_n la n-ième somme partielle de cette série.

1. Déterminer la monotonie de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Justifier que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{e^k + e^{-k}} \leq e^{-k}$.
3. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n \leq \frac{1}{1 - e^{-1}}$.
4. Montrer que la série $\sum \frac{1}{e^n + e^{-n}}$ converge et que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{e^n + e^{-n}} \leq \frac{e}{e-1}.$$

Exercice 12

Considérons la série $\sum \frac{1}{n}$ et notons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ sa somme partielle de rang n.

Nous allons montrer que cette série est divergente.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_{2n} - S_n \geq \frac{1}{2}$.
2. Supposons, par l'absurde, que la série $\sum \frac{1}{n}$ converge, c'est-à-dire que la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un réel ℓ.
   (a) Calculer $\lim_{n\to+\infty} (S_{2n} - S_n)$.
   (b) En déduire une contradiction avec la question 1. et conclure.

Exercice 13

On considère la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $a_0 > 0$ et par la relation suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = a_n e^{-a_n}.$$

1. (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n > 0$.
   (b) Étudier le sens de variation de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (c) En déduire que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.
2. (a) On pose $b_n = \ln(a_n)$. Calculer $b_{n+1} - b_n$ en fonction de a_n.
   (b) En déduire la nature de la série $\sum a_n$.

Exercice 14

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par la donnée de $u_0 \in]0,1[$ et par la relation suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n - u_n^2.$$

1. (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]0,1[$.
   (b) Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (c) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, et déterminer sa limite.
2. Montrer que la série $\sum u_n^2$ converge et calculer sa somme en fonction de u_0.
3. Quelle est la nature de la série $\sum (\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n))$?

Exercice 15

On se propose d'étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la donnée de $u_0 = 0$ et par la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 1}{2}.$$

1. (a) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $0 \leq u_n \leq 1$.
   (b) Étudier les variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (c) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et donner sa limite.
2. Pour tout entier naturel n, on pose : $v_n = 1 - u_n$.
   (a) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, exprimer $v_k - v_{k+1}$ en fonction de v_k.
   (b) Simplifier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(v_k - v_{k+1})$.
   (c) Donner pour finir la nature de la série de terme général v_n^2 ainsi que la valeur de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} v_n^2$.

Exercice 16

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par la donnée $u_0 > 0$ et par la relation suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + u_n^2.$$

1. (a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
   (b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.
   On pourra faire un raisonnement par l'absurde.
2. On pose, pour tout entier naturel n, $v_n = \dfrac{\ln(u_n)}{2^n}$.
   (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{2^{n+1}} \ln\left(1 + \dfrac{1}{u_n}\right)$.
   (b) Montrer que, pour tout $x \geq 0$, $0 \leq \ln(1+x) \leq x$.
   (c) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq v_{n+1} - v_n \leq \dfrac{1}{2^{n+1}u_0}$.
   (d) Montrer que la série de terme général $v_{n+1} - v_n$ est convergente.
   (e) En déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.