TD15

Espaces vectoriels et applications linéaires

Espaces vectoriels

Exercice 1

Dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, on pose $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $e_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Écrire les vecteurs $u = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ comme combinaison linéaire de e_1, e_2 et e_3.

Exercice 2

Dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, on pose $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Parmi les vecteurs suivants, repérer ceux qui sont combinaison linéaire de e_1 et e_2 puis expliciter la combinaison linéaire correspondante.

$$u = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ v = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ w = \begin{pmatrix} 10 \\ -4 \\ 11 \end{pmatrix},\ x = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix},\ y = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix},\ z = \begin{pmatrix} 10 \\ -2 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Exercice 3

Dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, on pose pour tout réel k : $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ k \\ 2 \end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ k \end{pmatrix}$.

Déterminer k pour que le vecteur $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ soit combinaison linéaire des vecteurs e_1 et e_2.

Exercice 4

Parmi les espaces suivants, déterminer ceux qui sont des espaces vectoriels :

1. $F_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}),\ x_1 + x_2 = 1 \right\}$
2. $F_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}),\ x_1 - 2x_2 = 0 \right\}$
3. $F_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}),\ x_1 x_2 = 0 \right\}$
4. $F_4 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}),\ x_1^2 + x_2 - x_3 = 0 \right\}$
5. $F_5 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}),\ x_1 + x_2 = 0 \text{ et } x_1 - x_3 = 0 \right\}$

Exercice 5

On considère dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ les vecteurs suivants :

$$u = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad w = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Montrer que $\text{Vect}(u, v, w) = \text{Vect}(u, v)$.

Exercice 6

On se place dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et on considère les vecteurs suivants :

$$u = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad s = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad t = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

1. (a) Montrer que u et v sont des vecteurs de $\text{Vect}(s, t)$.
   (b) En déduire que : $\text{Vect}(u, v) \subset \text{Vect}(s, t)$.
2. De la même façon, montrer que : $\text{Vect}(s, t) \subset \text{Vect}(u, v)$.

Exercice 7

On considère les vecteurs suivants :

$$u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

Montrer que : $\text{Vect}(u_1, u_2) = \text{Vect}(v_1, v_2)$.

Exercice 8

Déterminer, parmi les familles suivantes, celles qui sont des bases de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$:

$$\mathcal{B}_1 = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \quad \mathcal{B}_2 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \quad \mathcal{B}_3 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$\mathcal{B}_4 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right), \quad \mathcal{B}_5 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right).$$

Exercice 9

1. (a) Montrer que la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
   (b) Déterminer les coordonnées du vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ dans cette base.
2. (a) Montrer que la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.
   (b) Quelles sont les coordonnées du vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ dans cette base ?

Exercice 10

1. Déterminer la dimension du sous-espace vectoriel F de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ engendré par les vecteurs :

$$\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix}0\\-1\\5\end{pmatrix}.$$

2. Même question avec le sous-espace vectoriel G de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ engendré par les vecteurs :

$$\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}4\\1\\1\end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix}2\\-3\\3\end{pmatrix}.$$

Exercice 11

1. On considère dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ les vecteurs $u = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$. La famille (u, v) est-elle une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$?
2. Quelle est la dimension du sous-espace vectoriel $F =$Vect(u, v) ? La famille (u, v) en est-elle une base ?
3. Le vecteur $x = \begin{pmatrix}1\\4\\7\end{pmatrix}$ appartient-il à F ? Si oui, donner ses coordonnées dans la base (u, v) ?
4. Mêmes questions avec le vecteur $y = \begin{pmatrix}-1\\6\\9\end{pmatrix}$.
5. En déduire que la famille (u, v, y) est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Exercice 12

Montrer que les ensembles suivants sont des espaces vectoriels et déterminer pour chacun d'eux une base et la dimension :

1. $F_1 = \left\{ \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}),\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \right\}$.
2. $F_2 = \left\{ \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}),\ x_1 + 2x_2 = 0 \text{ et } x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \right\}$.
3. $F_3 = \left\{ \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}),\ x_2 - 2x_3 = 0 \right\}$.
4. $F_4 = \left\{ \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R}),\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \text{ et } x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \right\}$.

Exercice 13
On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & -4 & 4 \end{pmatrix}$ et l'ensemble $F = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ telle que $MX = 2X\}$.

1. Montrer que F est un espace vectoriel.
2. Donner une famille génératrice. Cette famille génératrice est-elle une base de F ?

Exercice 14

1. **Intersection de deux sous-espaces vectoriels**

   Soit E un espace vectoriel et F, G deux sous-espaces vectoriels de E.

   Montrer que $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E.

2. **Union de deux sous-espaces vectoriels**

   Soit $F = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}),\ x_1 + x_2 = 0 \right\}$ et $G = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}),\ x_1 - x_2 = 0 \right\}$.

   (a) Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

   (b) Trouver un vecteur générateur de F et de G, puis représenter graphiquement F et G.

   (c) Écrire le vecteur $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G.

   (d) $F \cup G$ est-il un sous-espace vectoriel de E ?

Exercice 15

1. On considère les vecteurs $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. On note $E = \text{Vect}(v_1, v_2, v_3)$.

   Déterminer une base de E.

2. Soit $F = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R}),\ x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \text{ et } x_1 - x_3 - x_4 = 0 \right\}$.

   Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ et en donner une base.

3. Déterminer une base et la dimension de $E \cap F$.

Applications linéaires

Exercice 16
Déterminer si les applications suivantes sont linéaires :

1. $f_1 : \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 \\ x_2 - x_3 \end{pmatrix}$
2. $f_2 : \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2 + x_1 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix}$
3. $f_3 : \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_2 - x_3 \\ x_1^2 - x_3^2 \\ 3x_1x_2x_3 \end{pmatrix}$

Exercice 17

Montrer que les applications suivantes sont linéaires, déterminer leur matrice dans la base canonique, leur noyau et leur image puis dire si elles sont injectives ou surjectives.

1. $f_1 : \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}),\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -2x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \\ x_1 + x_2 + x_3 \end{pmatrix}$

2. $f_2 : \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}),\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + 2x_3 \\ x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 \end{pmatrix}$

3. $f_3 : \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R}),\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_3 \\ x_2 - x_3 \\ x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \end{pmatrix}$

4. $f_4 : \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}),\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 - x_3 + x_4 \\ x_2 + 2x_3 \end{pmatrix}$

Exercice 18

Considérons l'application $f : \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}),\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ 2x_2 \\ x_1 - x_2 + x_3 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Vérifier que $f \circ f = f$ (on dit que f est un projecteur).
3. Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$. On écrira $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(v_1)$.
4. Déterminer $\mathrm{Im}(f)$. On écrira $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(v_2, v_3)$.
5. Montrer que (v_1, v_2, v_3) est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Exercice 19

Soit f l'application de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ définie par $f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 - x_3 \\ x_2 - 2x_3 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.
3. Montrer que $\dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}))$.

Exercice 20

Soit $f : \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ une application linéaire telle que les images des vecteurs de la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ sont respectivement $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. Quelle est la matrice de f relativement à la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$?

2. Déterminer $f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right)$, pour tout $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

3. Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.

4. Montrer que $\dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}))$.

Exercice 21

Soit g l'application linéaire de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ définie par :

$$g\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix},\ g\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix},\ g\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

1. (a) Déterminer $g\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right)$, pour tout $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
   (b) Déterminer $\mathrm{Ker}(g)$ et $\mathrm{Im}(g)$. g est-elle injective, surjective ?

2. Soit $f : \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 \\ x_1 - 3x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}$.
   (a) Montrer que f est linéaire.
   (b) Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$. f est-elle injective, surjective ?

3. (a) Déterminer $g \circ f$ et montrer que $g \circ f$ est linéaire.
   (b) Montrer que $g \circ f$ est bijectif.

4. (a) Déterminer $f \circ g$ et montrer que $f \circ g$ est linéaire.
   (b) Est-elle injective ? surjective ? bijective ?

Réduction d'endomorphismes

Exercice 22

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ et l'application linéaire $f : \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, $X \mapsto AX$.

1. Montrer que $E_1 = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}),\ f(X) = X\}$ et $E_2 = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}),\ f(X) = 2X\}$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

2. Justifier que E_1 possède une base constituée de deux vecteurs que l'on notera e_1 et e_2.

3. Justifier que E_2 possède une base constituée d'un unique vecteur que l'on notera e_3.

4. Vérifier que (e_1, e_2, e_3) forment une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

5. Si on note $e_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} e \\ f \\ g \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} h \\ i \\ j \end{pmatrix}$, on pose $P = \begin{pmatrix} a & e & h \\ b & f & i \\ c & g & j \end{pmatrix}$.
   (a) Montrer que la matrice P est inversible et donner son inverse P^{-1}.
   (b) Déterminer l'unique matrice D telle que $A = PDP^{-1}$.

Exercice 23
On considère l'application $f : \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}),\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 \\ x_1 + 2x_3 \\ 2x_3 \end{pmatrix}$.

1. Justifier que f est une application linéaire.

   Déterminer une matrice A telle que $\forall X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}),\ f(X) = AX$.
2. Montrer que $E_1 = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}),\ f(X) = X\}$ et $E_2 = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}),\ f(X) = 2X\}$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
3. Justifier que chacun de ces espaces possède une base constituée d'un unique vecteur, que l'on notera e_1 pour E_1 et e_2 pour E_2.
4. Déterminer un vecteur e_3 tel que $f(e_3) = e_2 + 2e_3$.
5. Justifier que la famille (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
6. Si on note $e_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} e \\ f \\ g \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} h \\ i \\ j \end{pmatrix}$, on pose $P = \begin{pmatrix} a & e & h \\ b & f & i \\ c & g & j \end{pmatrix}$.
   (a) Montrer que la matrice P est inversible et donner son inverse P^{-1}.
   (b) Déterminer l'unique matrice T telle que $A = PTP^{-1}$.

Exercice 24
On considère l'application $f : \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}),\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x_1 - x_2 + 2x_3 \\ -2x_1 + 2x_3 \\ -2x_1 - x_2 + 3x_3 \end{pmatrix}$.

1. Justifier que f est une application linéaire.

   Déterminer une matrice A telle que $\forall X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}),\ f(X) = AX$.
2. Vérifier que $A^2 = A$.
3. Montrer que si λ un nombre réel et $X_0 \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ est un vecteur non nul tel que $AX_0 = \lambda X_0$ alors $\lambda^2 = \lambda$. En déduire les valeurs possibles de λ.
4. Montrer que $E_0 = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}),\ f(X) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ puis justifier qu'il possède une base constitué d'un seul vecteur que l'on notera e_1.
5. Montrer que $E_1 = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}),\ f(X) = X\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ puis justifier qu'il possède une base constitué de deux vecteurs que l'on notera e_2 et e_3.
6. Si on note $e_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} e \\ f \\ g \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} h \\ i \\ j \end{pmatrix}$, on pose $P = \begin{pmatrix} a & e & h \\ b & f & i \\ c & g & j \end{pmatrix}$.
   (a) Montrer que la matrice P est inversible et donner son inverse P^{-1}.
   (b) Déterminer l'unique matrice D telle que $A = PDP^{-1}$.

Exercice 25
Considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et l'application linéaire $f : \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}),\ X \mapsto AX$.

1. Vérifier que $A^2 = 2A$.

2. Montrer que si λ un nombre réel et $X_0 \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ est un vecteur non nul tel que $AX_0 = \lambda X_0$ alors $\lambda^2 = 2\lambda$. En déduire les valeurs possibles de λ.

3. Montrer que $E_0 = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}),\ f(X) = 0\}$ et $E_2 = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}),\ f(X) = 2X\}$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

4. Justifier que E_0 possède une base constituée d'un unique vecteur que l'on notera e_1.

5. Justifier que E_2 possède une base constituée de deux vecteurs que l'on notera e_2 et e_3.

6. Si on note $e_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} e \\ f \\ g \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} h \\ i \\ j \end{pmatrix}$, on pose $P = \begin{pmatrix} a & e & h \\ b & f & i \\ c & g & j \end{pmatrix}$.
   (a) Montrer que la matrice P est inversible et donner son inverse P^{-1}.
   (b) Déterminer l'unique matrice D telle que $A = PDP^{-1}$.

Exercice 26

1. Considérons $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et l'application linéaire $f : \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, $X \mapsto AX$.
   (a) Déterminer les réels λ tels que la matrice $A - \lambda I$ soit non inversible.
   (b) Pour chaque valeur de λ obtenue à la question précédente, justifier que le sous-espace vectoriel $E_\lambda = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}),\ f(X) = \lambda X\}$ possède une base constituée d'un unique vecteur.
   On notera $e_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} e \\ f \\ g \end{pmatrix}$ et $e_3 = \begin{pmatrix} h \\ i \\ j \end{pmatrix}$ les trois vecteurs obtenus.
   (c) On pose $P = \begin{pmatrix} a & e & h \\ b & f & i \\ c & g & j \end{pmatrix}$.
   Montrer que la matrice P est inversible, donner son inverse P^{-1} et déterminer l'unique matrice D telle que $A = PDP^{-1}$.

2. Même question avec les matrices $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -4 \\ -2 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.