TD17

Espaces probabilisés et variables aléatoires discrètes infinies

Espaces probabilisés

Exercice 1

On lance une pièce une infinité de fois. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note A_k l'événement "le k-ième lancer donne pile".

1. Décrire par une phrase chacun des événements suivants :

$$E_1 = \bigcap_{k=5}^{+\infty} A_k, \quad E_2 = \left(\bigcap_{k=1}^{4} \overline{A_k}\right) \bigcap \left(\bigcap_{k=5}^{+\infty} A_k\right), \quad E_3 = \bigcup_{k=5}^{+\infty} A_k.$$

2. Écrire à l'aide des A_k l'événement B_n "on obtient au moins une fois pile après le n-ième lancer".

3. Écrire à l'aide des A_k les événements :

   (a) C_n : "on n'obtient plus que des piles à partir du n-ième lancer".

   (b) C : "on n'obtient plus que des piles à partir d'un certain lancer".

Exercice 2

Une puce se déplace sur les trois sommets d'un triangle ABC du plan. A l'instant 0, elle est en A. A chaque instant $n \in \mathbb{N}^*$, elle fait un saut selon le protocole suivant :

- si elle est en A, elle va en B;
- si elle est en B, elle va en A avec la probabilité $\frac{1}{2}$ et en C avec la probabilité $\frac{1}{2}$;
- si elle est en C, elle y reste.

On note E l'événement "la puce arrive en C". On cherche à montrer que E est quasi-certain.

1. Montrer que la puce ne peut arriver au point C qu'à des instants pairs.

2. Calculer la probabilité que la puce arrive en C pour la première fois à l'instant $2n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

3. En déduire que $P(E) = 1$.

Exercice 3

Soit une urne avec une boule blanche, une boule noire et une boule rouge. On y effectue des tirages successifs avec remise. On notera B l'événement "on a tiré au moins une boule blanche".

1. Écrire l'événement B (ou $\overline{B}$) de trois manières différentes :

   - avec les A_n : "on n'a aucune blanche sur les n premiers tirages",
   - avec les B_n : "on a une blanche pour la première fois au n-ième tirage",
   - avec les C_n : "on a au moins une blanche sur les n premiers tirages".

2. Proposer alors trois calculs pour déterminer $P(B)$. Comment peut-on interpréter le résultat obtenu ?

Exercice 4
On considère une série infinie d'urnes $(U_n)_{n\geq 2}$. Chaque urne contient des boules blanches et des boules noires. L'expérience est la suivante : on tire une boule dans U_2, une boule dans U_3, etc. jusqu'à obtenir pour la première fois une boule noire.

1. Soient l'événement A "on ne tire jamais de boule noire" et les événements A_n "les tirages dans les urnes numérotées de 2 à n n'amènent que des boules blanches".
   (a) Quelle est la particularité de la suite d'événements $(A_n)_{n\geq 2}$?
   (b) Exprimer A en fonction des A_n.
2. On suppose que pour tout entier $n \geq 2$, l'urne U_n contient n boules dont une seule noire.
   (a) Calculer $P(A_n)$.
   (b) En déduire la valeur de $P(A)$.
3. On suppose que pour tout entier $n \geq 2$, l'urne U_n contient n^2 boules dont une seule noire.
   (a) Montrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 2$: $P(A_n) = \dfrac{n+1}{2n}$.
   (b) En déduire la valeur de $P(A)$.

Exercice 5
Dans une population, on estime que la probabilité qu'une famille choisie au hasard ait k enfants est égale à $e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$, où $\lambda > 0$ est une constante réelle et $k \in \mathbb{N}$.

En supposant les sexes équiprobables à la naissance, calculer la probabilité qu'une famille choisie au hasard n'ait que des garçons.

Variables aléatoires discrètes infinies

Exercice 6
Soit X une variable aléatoire discrète définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ telle que :

$$X(\Omega) = \mathbb{N}^* \text{ et } \forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(X = k) = \frac{1}{2^k}$$

1. Vérifier que l'on définit ainsi une loi de probabilité.
2. X admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer.
3. Montrer que $Y = e^{-X}$ admet une espérance et la calculer.

Exercice 7
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et X une variable aléatoire discrète définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ telle que :

$$X(\Omega) = \mathbb{N} \text{ et } \forall k \in \mathbb{N},\ P(X = k) = \frac{\alpha}{k!}.$$

1. Déterminer la valeur de α pour qu'on ait ainsi défini une loi de probabilité.
2. Montrer que X admet une espérance et la calculer.

3. Montrer que X admet une variance et la calculer.

4. (a) Déterminer trois réels a, b, c tels que pour tout entier naturel k :

$$k^3 = ak(k-1)(k-2) + bk(k-1) + ck.$$

   (b) En déduire que X admet un moment d'ordre 3 et le calculer.

Exercice 8

Soit X une variable aléatoire discrète définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ dont la loi est donnée par :

$$X(\Omega) = \mathbb{N} \setminus \{0,1\} \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\},\ P(X=k) = \frac{4}{3(k^2-1)}.$$

1. (a) Vérifier que $\displaystyle\sum_{k \in X(\Omega)} P(X=k) = 1$.

   On pourra remarquer que $\dfrac{1}{k^2-1} = \dfrac{1}{2(k-1)} - \dfrac{1}{2(k+1)}$.

   (b) Calculer $P(X^2 \leq 4X - 3)$.

   (c) Calculer $P(\{X \text{ est paire}\})$.

2. (a) Montrer que, pour tout entier $k \geq 2$, $\dfrac{k}{k^2-1} \geq \dfrac{1}{k}$.

   (b) En déduire que X n'admet pas d'espérance.

Exercice 9

Une urne contient initialement une boule blanche et une boule rouge. On effectue une suite de tirage au hasard dans l'urne. A chaque tirage, la boule tirée est remise dans l'urne et on y ajoute une boule rouge supplémentaire. On procède ainsi jusqu'à l'obtention de la première boule rouge et on note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de celle-ci.

Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on note B_i (resp. R_i) l'événement "le i-ième tirage amène une boule blanche (resp. rouge)".

1. Expliciter le support $X(\Omega)$ de X.

2. Soit $k \in X(\Omega)$.

   (a) Écrire l'événement $(X = k)$ à l'aide des événements B_i et R_i.

   (b) En déduire $P(X = k)$.

3. En remarquant que $k = (k+1) - 1$, vérifier que : $\displaystyle\sum_{k \in X(\Omega)} P(X=k) = 1$.

4. (a) Calculer $E(X+1)$. En déduire $E(X)$.

   (b) Calculer $E((X+1)(X-1))$. En déduire que : $V(X) = e(3-e)$.

Exercice 10

On lance indéfiniment une pièce, donnant Pile avec la probabilité p et Face avec la probabilité $q = 1-p$ (avec $0 < p < 1$). Les lancers sont supposés indépendants.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note P_k l'événement "obtenir Pile au k-ième lancer" et F_k l'événement "obtenir Face au k-ième lancer".

On considère une variable aléatoire X égale au nombre de Faces précédant le premier Pile.

1. Déterminer $X(\Omega)$.
2. Écrire, pour tout $n \in X(\Omega)$, l'événement $(X = n)$ à l'aide de certains des événements P_k et F_k, puis donner la loi de X.
3. Montrer que X possède une espérance et calculer $E(X)$.

Exercice 11

On lance trois dés équilibrés à six faces jusqu'à obtenir trois 6, sachant que dès qu'un dé tombe sur 6, on arrête de le lancer, et on se contente de relancer les dés n'ayant pas encore donné un 6.
On note X_1 la variable aléatoire égale au nombre de lancers nécessaires pour obtenir un 6 avec le premier dé. On définit de la même manière X_2 et X_3.

1. (a) Déterminer les lois des variables aléatoires X_1, X_2 et X_3.
   (b) Soit $i = 1, 2$ ou 3 et $k \in X_i(\Omega)$. Déterminer $P(X_i \leq k)$.
2. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de lancers nécessaires avant d'obtenir les trois 6.
   (a) Déterminer $X(\Omega)$.
   (b) Soit $k \in X(\Omega)$.
   Exprimer l'événement $(X \leq k)$ à l'aide des événements $(X_1 \leq k)$, $(X_2 \leq k)$ et $(X_3 \leq k)$.
   (c) En déduire $P(X \leq k)$ puis $P(X = k)$ pour tout $k \in X(\Omega)$.
   (d) Montrer que X possède une espérance et la calculer.

Exercice 12

Une puce se déplace sur 3 cases A, B et C. A l'instant initial, elle est en A. Lorsqu'elle est en A à un instant donné, elle passe en B ou C avec équiprobabilité l'instant suivant. Lorsqu'elle est en B à un instant donné, elle passe en A ou C avec équiprobabbilité l'instant suivant. Enfin, lorsqu'elle est en C à un instant donné, elle y reste par la suite.
Pour $n \in \mathbb{N}$, notons A_n (respectivement B_n et C_n) l'événement : "la puce est sur la case A à l'instant n" (respectivement sur la case B et sur la case C) et a_n, b_n et c_n les probabilités d'être en A, B et C à l'instant n.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. En utilisant la formule des probabilités totales, montrer que :
$$a_{n+1} = \frac{1}{2}b_n, \quad b_{n+1} = \frac{1}{2}a_n, \quad c_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}b_n + c_n.$$
2. (a) Montrer que la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2.
   (b) En déduire l'expression de c_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. On souhaite montrer dans cette question qu'il est quasi-certain que la puce atteigne la case C.
   (a) On note F l'événement : "la puce atteint la case C".
   Exprimer F en fonction des événements C_n, $n \in \mathbb{N}^*$.
   (b) Justifier que $(C_n)_{n\geq 1}$ est une suite croissante d'événements et en déduire la valeur de $P(F)$.
   (c) Conclure.
4. On note X la variable aléatoire réelle égale au premier instant où la puce atteint la case C.
   (a) Déterminer la loi de X.
   (b) Calculer alors $E(X)$ et $V(X)$.

Exercice 13

On réalise une suite de lancers d'une pièce équilibrée.
On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition du premier pile et Y la variable aléatoire égale au rang d'apparition du deuxième pile.

1. Déterminer $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$.
2. Calculer, pour tout $k \in X(\Omega)$, $P(X = k)$.
3. Montrer que X possède une espérance et la calculer.
4. Calculer $P((X = k) \cap (Y = n))$ pour tout $k \in X(\Omega)$ et pour tout $n \in Y(\Omega)$.
5. En déduire, pour tout $n \in Y(\Omega)$, $P(Y = n)$.
6. Vérifier qu'on a bien : $\displaystyle\sum_{n \in Y(\Omega)} P(Y = n) = 1$.
7. Montrer que Y possède une espérance et la calculer.

Exercice 14

Deux joueurs effectuent une série de lancers d'une pièce équilibrée jusqu'à obtenir pile. On note X et Y les variables aléatoires égales au nombre de tirages nécessaires pour chacun des joueurs.

1. Donner la loi de X et de Y.
2. (a) En considérant le système complet d'événements $(X = n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, justifier que :
$$(X = Y) = \bigcup_{n=1}^{+\infty} ((X = n) \cap (Y = n)).$$
   (b) En déduire $P(X = Y)$.
3. (a) Déterminer pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, calculer $P(X > k)$.
   (b) En considérant le système complet d'événements $(Y = k)_{k \in \mathbb{N}^*}$, déterminer $P(X > Y)$.
4. Déduire $P(X \geq Y)$ des questions précédentes.

Exercice 15

Soit un dé équilibré comprenant 1 face blanche et 5 faces rouges. On lance ce dé indéfiniment et on s'intéresse aux longueurs des séries de B et de R : par exemple, si les lancers donnent les résultats

BBRRRRRRBBBRR...

alors la première série BB est de longueur 2 et la deuxième série $RRRRRR$ est de longueur 6.
Soient X_1 et X_2 les variables aléatoires égales aux longueurs de la première et deuxième série.

1. Déterminer la loi de X_1.
2. Soient $(i, j) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Calculer $P((X_1 = i) \cap (X_2 = j))$.
3. En déduire la loi de X_2.
4. Calculer $E(X_1)$ et $E(X_2)$ après avoir justifié leur existence.

Exercice 16

Une urne contient des boules blanches et des boules noires. La proportion de boules blanches est p et la proportion de boules noires est q, avec $p, q \in]0, 1[$ et $p + q = 1$.
On effectue des tirages successifs avec remise et on s'arrête dès que l'on a obtenu au moins une boule blanche et au moins une boule noire.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués et Y le nombre de boules blanches obtenues. Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on note B_i l'événement "la i-ième boule tirée est blanche" et N_i "la i-ième boule tirée est noire".

1. Montrer que, pour tout $k \geq 2$, $P(X = k) = qp^{k-1} + pq^{k-1}$.
2. Vérifier que : $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} P(X = k) = 1$.
3. Montrer que X admet une espérance et que $E(X) = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} - 1$.
4. Pour tout entier $k \geq 2$, déterminer $P((X = k) \cap (Y = 1))$. On distinguera les cas $k = 2$ et $k \geq 3$.
5. En déduire que : $P(Y = 1) = q(1 + p)$.
6. Déterminer la loi de Y.

Exercice 17

On joue à pile ou face avec une pièce non équilibrée dont la probabilité d'obtenir "pile" vaut p et celle de "face" vaut q (avec $p + q = 1$). On note P_k (resp. F_k) l'évènement "on obtient pile (resp. face) au k-ième lancer". On lance indéfiniment la pièce et on note X la variable aléatoire égale au rang où apparait pour la première fois deux résultats "pile" consécutifs.

1. Calculer en fonction de p et q : $P(X = 1)$, $P(X = 2)$, $P(X = 3)$, $P(X = 4)$.
2. Montrer que, pour tout entier $n \geq 3$,
$$P_{P_1}(X = n) = qP(X = n - 2) \quad \text{et} \quad P_{F_1}(X = n) = P(X = n - 1)$$
3. En déduire que pour tout entier $n \geq 3$: $P(X = n) = qP(X = n - 1) + pqP(X = n - 2)$.
4. On suppose à présent que $p = \dfrac{2}{3}$ et $q = \dfrac{1}{3}$.
   (a) Établir que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(X = n + 1) = \dfrac{4}{9}\left(\left(\dfrac{2}{3}\right)^n - \left(-\dfrac{1}{3}\right)^n\right)$.
   (b) Calculer $E(X)$, $E(X(X - 1))$ et $V(X)$.

Exercice 18

On réalise une suite de lancers d'une pièce équilibrée.
On note P_k (resp. F_k) l'évènement "on obtient pile (resp. face) au k-ième lancer". Pour ne pas surcharger l'écriture, on écrira, par exemple, P_1F_2 à la place de $P_1 \cap F_2$.
On note X la variable aléatoire qui prend la valeur k si l'on obtient pour la première fois pile puis face dans cet ordre aux lancers $k - 1$ et k (k désignant un entier supérieur ou égal à 2), X prenant la valeur 0 si l'on obtient jamais une telle succession.

1. (a) Calculer $P(X = 2)$.
   (b) En remarquant que $(X = 3) = P_1P_2F_3 \cup F_1P_2F_3$, calculer $P(X = 3)$.

(c) Sur le modèle de la question précédente, écrire, pour tout entier k supérieur ou égal à 3, l'évènement $(X = k)$ comme réunion de $(k-1)$ évènements incompatibles.

(d) En déduire que, pour tout entier $k \geq 2$: $P(X = k) = (k-1) \times \left(\frac{1}{2}\right)^k$.

(e) Montrer que l'événement $(X = 0)$ est quasi-impossible.

2. On se propose, dans cette question, de retrouver le résultat de la question 1.(d) par une autre méthode.

   (a) Soit $k \geq 3$. Justifier que :

$$P_{P_1}(X = k) = \frac{1}{2^{k-1}} \quad \text{et} \quad P_{F_1}(X = k) = P(X = k-1).$$

   (b) En déduire, en utilisant le système complet d'événements (P_1, F_1) que :

$$\forall k \geq 3,\ P(X = k) = \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2}P(X = k-1).$$

   (c) On pose, pour tout entier k supérieur ou égal à 2, $u_k = 2^k P(X = k)$.
   Montrer que la suite $(u_k)_{k\geq 2}$ est arithmétique. Retrouver le résultat annoncé.

3. Montrer que X admet une espérance et la calculer.