TD18

Lois discrètes usuelles

Exercice 1

Dans chacune des situations suivantes, dites si la variable aléatoire X suit une loi usuelle. Si oui, expliciter la loi, son espérance et sa variance.

1. Un dé équilibré possède deux faces blanches et quatre faces noires. On lance une fois le dé et si on obtient une face blanche alors $X = 1$ et sinon $X = 0$.
2. Un dé équilibré possède deux faces blanches et quatre faces noires. On lance 10 fois le dé et on note X le nombre de faces blanches obtenues.
3. Un dé équilibré possède deux faces blanches et quatre faces noires. On lance le dé jusqu'à obtenir pour la première fois une face noire et on note X le nombre de tirages effectuées.
4. Une urne contient 2 boules blanches et 2 boules noires. On effectue 3 tirages sans remise et on note X le nombre de boules blanches obtenues.
5. Une urne contient 2 boules blanches et 2 boules noires. On effectue 3 tirages avec remise et on note X le nombre de boules blanches obtenues.
6. Un sac contient 5 jetons numérotés de 1 à 5. On tire un jeton au hasard et on note X le numéro du jeton tiré.
7. Un sac contient 5 jetons numérotés de 1 à 5. On effectue des tirages avec remise indéfiniment et si on n'obtient jamais le jeton numéro 1 alors $X = 0$ et sinon $X = 1$.
8. Un sac contient 5 jetons numérotés de 1 à 5. On effectue des tirages avec remise jusqu'à obtenir pour la première fois le jeton numéro 1 et on note X le nombre de tirages effectuées.

Exercice 2

On considère un jeu de 32 cartes. On tire une à une les cartes sans remise jusqu'à obtenir la dame de coeur. On note X la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.

1. Déterminer la loi de X.
2. En déduire sans calcul l'espérance et la variance de X.

Exercice 3

Une urne contient a boules blanches et b boules noires. On tire n boules avec remise à chaque tirage. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches tirées.

1. Déterminer la loi de X.
2. En utilisant le fait que $\displaystyle\sum_{k\in X(\Omega)} P(X = k) = 1$, retrouver la formule du binôme de Newton.

Exercice 4

Soit X une variable aléatoire réelle suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$, avec $n \in \mathbb{N}$ et $p \in]0, 1[$.

1. Calculer $E(X^2)$ et $E\left(\dfrac{1}{X+1}\right)$.

2. Déterminer la loi de $Y = n - X$.

Exercice 5

Soit $p \in]0,1[$ et X une variable aléatoire suivant une loi géométrique $\mathcal{G}(p)$. On pose $Y = (-1)^X$.

1. Déterminer la loi de Y puis calculer $E(Y)$ et $V(Y)$.
2. Calculer $E(XY)$.

Exercice 6

Soient $\lambda > 0$ et X une variable aléatoire réelle suivant une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$.

1. Calculer $E(X(X-1)(X-2))$. En déduire la valeur de $E(X^3)$.
2. Calculer $E((-1)^X)$ et $E\left(\dfrac{1}{X+1}\right)$.

Exercice 7

On lance indéfiniment une pièce, donnant *Pile* avec la probabilité p et *Face* avec la probabilité $1-p$ (avec $0 < p < 1$). Les lancers sont supposés indépendants.
On considère une variable aléatoire X égale au nombre de *Faces* précédant le premier *Pile*.

1. (a) Déterminer la loi de X.
   (b) Montrer que X possède une espérance et une variance et calculer $E(X)$ et $V(X)$.
2. (a) On pose $Y = X + 1$. Reconnaître la loi de Y.
   (b) Retrouver sans faire de calcul les valeurs de $E(X)$ et de $V(X)$ obtenues à la première question.

Exercice 8

Une urne contient 3 jetons numérotés de 1, 2 et 3. On les tire un à un, successivement et avec remise. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de tirage qu'il faut faire pour obtenir pour la première fois deux numéros distincts.

1. Déterminer $X(\Omega)$.
2. Soit $k \in X(\Omega)$.
   (a) On désigne par A_i l'événement : "le numéro i apparait au premier tirage".
   Calculer $P_{A_i}(X = k)$ pour tout $1 \leq i \leq 3$.
   (b) En appliquant convenablement la formule des probabilités totales, déterminer la loi de X.
3. Quelle est la loi de la variable aléatoire $Y = X - 1$?
4. Donner sans calcul les valeurs de $E(X)$ et de $V(X)$.

Exercice 9

Le nombre N de clients entrant dans un magasin en une journée suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Pierre et Paul distribuent des prospectus aux clients, à raison de 1 prospectus par client.
Pierre parie qu'a la fin de la journée, ils auront distribué un nombre pair de prospectus, tandis que Paul soutient qu'ils en auront distribué un nombre impair.

1. Soit A l'événement : "Pierre et Paul distribuent un nombre pair de prospectus". Montrer que :
$$P(A) = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{2k}}{(2k)!} \quad \text{et} \quad P(\overline{A}) = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

2. Calculer $P(A) - P(\overline{A})$.

3. En déduire qui, de Pierre ou de Paul, a le plus de chance de gagner ?

Exercice 10

On dispose de n urnes numérotées de 1 à n. L'urne k contient k boules numérotées de 1 à k. On choisit une des urnes au hasard et on note X la variable aléatoire correspondant au numéro de l'urne choisie. Si $X = k$, on tire au hasard une boule dans l'urne k et on note Y la variable aléatoire correspondant au numéro de la boule choisie.

1. Reconnaître la loi de X puis donner $E(X)$ et $V(X)$.

2. Déterminer $Y(\Omega)$.

3. Pour $k \in X(\Omega)$ et $j \in Y(\Omega)$, déterminer $P_{(X=k)}(Y = j)$ (on distinguera les cas $k \geq j$ et $k < j$).

4. En déduire une expression de $P(Y = j)$ faisant intervenir une somme que l'on ne cherchera pas à calculer.

5. Calculer $E(Y)$.

Exercice 11

Un péage comporte m guichets. On suppose que le nombre N de voitures arrivant en 1 heure suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
On suppose, de plus, que les conducteurs choisissent leur poste au hasard, et que ces choix sont indépendants.
Soit X la variable aléatoire égale au nombre de voitures passant par le poste numéro un.

1. Déterminer, pour tout $k, n \in \mathbb{N}$, $P_{(N=n)}(X = k)$.

2. Justifier que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P(X = k) = \displaystyle\sum_{n=k}^{+\infty} P(N = n) P_{(N=n)}(X = k)$.

3. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P(X = k) = e^{-\lambda} \left(\dfrac{1}{m}\right)^k \dfrac{\lambda^k}{k!} \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left(\lambda\left(1 - \frac{1}{m}\right)\right)^n$.

4. En déduire la loi de probabilité de X (on retrouvera une loi usuelle).

5. Donner sans calcul les valeurs de $E(X)$ et de $V(X)$.

Exercice 12

On considère une urne contenant une boule noire et quatre boules blanches. On effectue l'expérience aléatoire suivante :

- On commence par piocher des boules de l'urne une à une avec remise jusqu'à obtenir la boule noire (que l'on remet aussi dans l'urne). On définit la variable aléatoire N égale au nombre de tirages avec remise nécessaires pour obtenir la boule noire.

- Puis, si N prend une valeur entière positive non nulle notée n, on réalise alors une seconde série de n tirages dans l'urne, toujours avec remise. On définit la variable aléatoire X égale au nombre de fois où la boule noire a été obtenue dans cette seconde série de tirages.

1. Reconnaître la loi de la variable aléatoire N. Donner son espérance et sa variance.
2. Soit $k \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la probabilité conditionnelle $P_{(N=n)}(X = k)$.
3. Vérifier : $P(X = 0) = \dfrac{4}{9}$.
4. Montrer : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(X = k) = \dfrac{25}{36}\left(\dfrac{4}{9}\right)^k$.

   On admet que l'égalité $\displaystyle\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^n = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}$ *est valable pour* $x \in]-1, 1[$ *et* $k \in \mathbb{N}$.
5. Montrer que X admet une espérance $E(X)$ et calculer $E(X)$.

Exercice 13

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.
Une urne contient une boule noire non numérotée et $n-1$ boules blanches, dont $n-2$ portent le numéro 0 et une porte le numéro 1. On extrait ces boules au hasard, une à une, sans remise, jusqu'à l'apparition de la boule noire.
Pour chaque $i \in [\![1, n-1]\!]$, on note B_i l'événement : "le i-ème tirage donne une boule blanche", on pose $\overline{B_i} = N_i$ et on note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la boule noire.

1. Donner l'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs que peut prendre la variable X.
2. (a) Pour tout $i \in [\![2, n-1]\!]$, justifier que : $P_{B_1 \cap \ldots \cap B_{i-1}}(B_i) = \dfrac{n-i}{n-i+1}$.
   (b) Utiliser la formule des probabilités composées pour trouver $P(X = k)$, pour tout $k \in X(\Omega)$.
   (c) Reconnaître la loi de X et donner son espérance et sa variance.
3. On note Y la variable aléatoire qui vaut 1 si la boule numérotée 1 a été piochée lors de l'expérience précédente, et qui vaut 0 sinon.
   (a) Pour tout $k \in X(\Omega)$, montrer toujours grâce à la formule des probabilités composées que :
   $$P\Big((X = k) \cap (Y = 0)\Big) = \frac{n-k}{n(n-1)}$$
   (b) En utilisant la formule des probabilités totales, en déduire $P(Y = 0)$.
   (c) Reconnaître la loi de Y et donner son espérance et sa variance.

Exercice 14

Une secrétaire effectue n appels téléphoniques vers n correspondants distincts ($n \geq 2$). Pour chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant demandé est p appartenant à $]0, 1[$ et la probabilité de ne pas l'obtenir est q, avec $q = 1 - p$.

1. Soit X le nombre de correspondants obtenus lors de ces n appels.
   (a) Quelle est la loi de X ?
   (b) Calculer l'espérance $E(X)$ et la variance $V(X)$.

2. Après ces n recherches, la secrétaire appelle une deuxième fois chacun des $n-X$ correspondants qu'elle n'a pas obtenus la première fois.

   Soit Y le nombre de correspondants obtenus dans la deuxième série d'appels, et $Z = X + Y$ le nombre total de correspondants obtenus.

   (a) Quelles sont les valeurs prises par Z ?

   (b) Calculer $P(Z = 0)$ et $P(Z = 1)$. Montrer que $P(Z = 1) = npq^{2n-2}(1 + q)$.

   (c) Calculer $P_{(X=i)}(Y = j)$ pour $i \in [\![0, n]\!]$ et $j \in [\![0, n - i]\!]$.

   (d) Démontrer que $P(Z = k) = \displaystyle\sum_{i=0}^{k} P((X = i) \cap (Y = k - i))$.

   (e) Calculer $P(Z = k)$.

   (f) Vérifier que $\dbinom{n}{i}\dbinom{n-i}{k-i} = \dbinom{n}{k}\dbinom{k}{i}$.

   En déduire que $P(Z = k) = \dbinom{n}{k}[p(1 + q)]^k (q^2)^{n-k}$.

   (g) Montrer que $p(1 + q) = 1 - q^2$ et reconnaitre la loi suivie par Z.
