TD3

Suites réelles

Généralités sur les suites

Exercice 1

1. Étudier la monotonie de chacune des suites suivantes définies de façon explicite :

$$a_n = n - n^2 \qquad b_n = \frac{1}{n!} \qquad c_n = \frac{4n-1}{n+3} \qquad d_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \qquad e_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^k\right)$$

2. Étudier la monotonie de chacune des suites suivantes définies de façon récursive :

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_0 & = & 2 \\ u_{n+1} & = & u_n + 2 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcl} v_0 & = & 1 \\ v_{n+1} & = & v_n + 2n + 1 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcl} w_0 & = & 3 \\ w_{n+1} & = & -w_n^2 - w_n - 1 \end{array}\right.$$

Exercice 2

Déterminer si les suites suivantes sont majorées, minorées, monotones :

$$u_n = e^{-n} \qquad v_n = \frac{(-1)^n}{n+1} \qquad w_n = (-2)^n \qquad x_n = 1 - 3^n \qquad y_n = 2 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

Suites arithmétiques

Exercice 3

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = 15 - n$.
   Démontrer que (u_n) est une suite arithmétique et donner sa raison et son premier terme.
2. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison 2 et de premier terme $v_0 = -3$.
   (a) Donner l'expression de (v_n) en fonction de n.
   (b) Soit $S_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$. Donner l'expression de S_n en fonction de n.

Exercice 4

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_{n+1} = u_n - 2n + 5$ et $u_0 = 4$.

1. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle arithmétique ?
2. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $v_n = u_{n+1} - u_n$.
   (a) La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-t-elle arithmétique ?
   (b) Quel est le sens de variation de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
3. Donner une expression de $S_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$ en fonction de n.
4. D'autre part, montrer que, pour tout entier naturel n, $S_n = u_{n+1} - u_0$.
5. En déduire une expression de u_n en fonction de n.

Exercice 5

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique. On sait que $u_4 = 5$ et que $u_1 = 11$.

1. Calculer la raison et le premier terme de la suite.
2. Donner l'expression de u_n en fonction de n.
3. Soit $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. Donner l'expression de S_n en fonction de n.

Exercice 6

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique. On sait que $u_4 + u_7 + u_{13} = 54$ et $u_{10} = 24$.
   (a) Déterminer son premier terme u_0 ainsi que sa raison r.
   (b) En déduire u_n en fonction de n.
2. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique. On sait que $\sum_{k=0}^{27} v_k = 287$ et $v_{27} = 17$.
   Déterminer son premier terme v_0 ainsi que sa raison r.

Suites géométriques

Exercice 7

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = 2 \times 3^{n-1}$.
   Démontrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique et donner sa raison et son premier terme.
2. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison 2 et de premier terme 3.
   (a) Donner l'expression de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de n.
   (b) Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$.

Exercice 8

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique. On sait que $u_3 = \frac{4}{3}$ et $u_8 = -324$.

1. Déterminer son premier terme u_0 ainsi que sa raison.
2. En déduire u_n en fonction de n.
3. Étudier le sens de variation de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 9

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n + 2n^2 - n$.

1. On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $v_n = u_n + 2n^2 + 3n + 5$.
   Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique.
2. Exprimer v_n en fonction de n.
3. En déduire u_n en fonction de n.

Exercice 10

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 10u_{n+1} - 9u_n$.
On pose d'autre part, $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{n+1} - u_n$.

1. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique.
2. Exprimer v_n en fonction de n.
3. Donner l'expression de $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} v_k$ en fonction de n.
4. En déduire u_n en fonction de n.

Exercice 11

Soient $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ deux suites définies par :

$$u_1 = 12,\ v_1 = 1 \ \text{ et } \ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3},\ v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4}.$$

1. Pour tout entier $n \geq 1$, on pose : $w_n = v_n - u_n$.
   Montrer que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison.
2. Exprimer w_n en fonction de n.
3. Pour tout entier $n \geq 1$, on pose : $t_n = 3u_n + 8v_n$.
   Montrer que la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est constante.
4. En déduire une expression de u_n et v_n en fonction de n.
5. Calculer u_2, v_2, u_3 et v_3 à l'aide des relations de récurrence, puis en utilisant le résultat de la question précédente.

Exercice 12

On considère deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & 2 \\ v_0 & = & -1 \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ \left\{\begin{array}{lcl} u_{n+1} & = & 2u_n - v_n \\ v_{n+1} & = & u_n + 4v_n \end{array}\right.$$

1. On considère la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $p_n = u_n + v_n$.
   Montrer que la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique. En déduire l'expression de p_n en fonction de n.
2. A l'aide de la question précédente, montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 3v_n + 3^n$.
3. Montrer que la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $z_n = \dfrac{v_n}{3^n}$ est arithmétique. En déduire l'expression de z_n en fonction de n.
4. Donner enfin l'expression de v_n puis de u_n en fonction de n.

Exercice 13

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{3u_n + 1}{2u_n + 4}$.

On introduit la suite auxiliaire $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $t_n = \dfrac{2u_n - 1}{u_n + 1}$.

1. Montrer que $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique.
2. En déduire l'expression de t_n puis de u_n.

Suites arithmético-géométriques

Exercice 14

Dans chacun des cas suivants, exprimer u_n en fonction de n :

1. $u_0 = 0$ et $\forall n \geq 0$, $u_{n+1} = -u_n + 2$.
2. $u_0 = 1$ et $\forall n \geq 0$, $u_{n+1} = 3u_n - 4$.
3. $u_0 = 1$ et $\forall n \geq 0$, $2u_{n+1} = 3u_n + 1$.

Exercice 15

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n + 3^n$.

1. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $v_n = \dfrac{u_n}{3^n}$ est une suite arithmético-géométrique.
2. En déduire une expression de v_n puis de u_n en fonction de n.

Exercice 16

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 6$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 5$.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. Exprimer u_n en fonction de n.
3. Quelles sont les variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
4. Calculer la somme $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.

Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Exercice 17

Soit (u_n) une suite définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+2} = 3u_{n+1} + 4u_n$.

1. Calculer u_2, u_3 et u_4.
2. Déterminer une expression de u_n en fonction de n.
3. Étudier les variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 18

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par $u_1 = 1$, $u_2 = 2$ et, pour tout entier naturel n, $2u_{n+2} = 12u_{n+1} - 18u_n$.

1. Déterminer une expression de u_n en fonction de n.
2. Quelles sont les variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Exercice 19

On considère les deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$x_0 = 1,\ y_0 = 9 \ \text{ et } \ \forall n \in \mathbb{N},\ \begin{cases} x_{n+1} = 6x_n - y_n \\ y_{n+1} = 5x_n \end{cases}$$

1. Calculer x_1, y_1, x_2, y_2.

2. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie une relation de récurrence linéaire d'ordre 2.
3. En déduire une expression de x_n, puis de y_n, en fonction de n.

Exercice 20
Soit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $w_0 = w_1 = 1$ et vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ w_{n+2} - 3w_{n+1} + 2w_n = 3.$$

1. On considère la suite $u_n = -3n$ et la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ z_n = w_n - u_n$.
   Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ z_{n+2} - 3z_{n+1} + 2z_n = 0$.
2. En déduire l'expression de z_n puis de w_n en fonction de n.

Suites convergentes et divergentes

Exercice 21
Étudier la convergence des suites suivantes et préciser leur limite éventuelle :

$$a_n = \frac{n}{1+e^{\frac{1}{n}}} \qquad b_n = \frac{e^{-n}}{\ln(n+2)} \qquad c_n = \frac{n^3+5n-\ln(n)}{\frac{1}{n^2}+5n^3}$$

$$d_n = \frac{2n+(-1)^n}{5n+(-1)^{n+1}} \qquad e_n = \frac{7^{n+1}+6^{n+1}}{6^n+7^n} \qquad f_n = \frac{n^7}{5^n}$$

$$g_n = e^{-3n^3+5n-\frac{2}{n}} \qquad h_n = \ln(n^2+2n+3) - \ln(n^2) \qquad i_n = \frac{n-\ln(n)}{n^2+\sqrt{n}}$$

$$j_n = \frac{e^n-1}{n} \qquad k_n = \sqrt{n^2+n+2} - \sqrt{n^2+n+1} \qquad l_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

$$m_n = \frac{\ln(n^2+1)+(-1)^n}{e^{-n}+n} \qquad o_n = \frac{2^n - 7\times 9^{n+1}}{5^{n-1}+2^{n-1}+3^{2n+1}} \qquad p_n = \frac{e^{-n}}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}$$

Exercice 22
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $\frac{x}{x+1} \leq \ln(1+x) \leq x$.
2. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{n}{n+1} \leq \ln(u_n) \leq 1$.
3. En déduire la convergence des suites $(\ln(u_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 23
On considère la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ définie par $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+k}$.

1. Montrer que, pour tout $x \in [0,1[$, $\ln(1+x) \leq x \leq -\ln(1-x)$.
2. En déduire que, pour tout $n \geq 2$ et pour tout $k \in [\![0,n]\!]$,
$$\ln\left(\frac{n+k+1}{n+k}\right) \leq \frac{1}{n+k} \leq \ln\left(\frac{n+k}{n+k-1}\right).$$
3. En sommant les inégalités précédentes pour k allant de 0 à n, en déduire que :
$$\ln\left(\frac{2n+1}{n}\right) \leq u_n \leq \ln\left(\frac{2n}{n-1}\right).$$

4. Conclure que $(u_n)_{n\geq 2}$ est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 24

Rappelons que, pour tout réel u, $\lfloor u \rfloor$ est la partie entière de u, c'est-à-dire le seul entier vérifiant :

$$\lfloor u \rfloor \leq u < \lfloor u \rfloor + 1.$$

1. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n} \leq x \leq \dfrac{\lfloor nx \rfloor + 1}{n}$.
2. En déduire que, pour tout réel x, la suite $\left(\dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et déterminer sa limite.

Ainsi, tout nombre réel est limite d'une suite de nombres rationnels. On dit que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 25

On considère les trois suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+5k}}, \qquad v_n = \sum_{k=1}^{n^2} \frac{1}{\sqrt{n^2+5k}} \qquad \text{et} \qquad w_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{k}{n}\right).$$

1. (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{n}{\sqrt{n^2+5n}} \leq u_n \leq \dfrac{n}{\sqrt{n^2+5}}$.
   (b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.
2. (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n \geq \dfrac{n}{\sqrt{6}}$.
   (b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.
3. (a) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $\ln(1+x) \geq x - \dfrac{x^2}{2}$.
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En posant $x = \dfrac{k}{n}$ dans l'inégalité précédente puis en sommant pour k allant de 1 à n, montrer que :
   $$\ln(w_n) \geq \frac{(n+1)(4n-1)}{12n}.$$
   (c) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n$.

Exercice 26

On considère la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie pour tout $n \geq 1$ par $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

1. Montrer que, pour tout $k \geq 1$, $\dfrac{1}{\sqrt{k+1}} \leq 2(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}) \leq \dfrac{1}{\sqrt{k}}$.
2. En déduire, pour tout entier $n \geq 1$, $S_n \geq 2(\sqrt{n+1}-1)$.
3. Quelle est la nature de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$?
4. On pose $T_n = S_n - 2\sqrt{n}$.
   Démontrer à l'aide du théorème de convergence monotone que $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

Exercice 27

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$, on définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par :

$$u_n = (1+a)(1+a^2)\dots(1+a^n) = \prod_{k=1}^{n}(1+a^k).$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.
2. On suppose $0 < a < 1$.
   (a) i. Démontrer que, pour tout réel x, on a : $1 + x \leq e^x$.
   ii. En déduire que, pour tout entier $n \geq 1$: $u_n \leq \prod_{k=1}^{n} e^{a^k}$.
   iii. Montrer que : $\prod_{k=1}^{n} e^{a^k} \leq e^{\frac{a}{1-a}}$.
   iv. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée.
   (b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.
3. On suppose $a \geq 1$.
   (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geq 2^n$.
   (b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est divergente.

Exercice 28

On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \qquad \text{et} \qquad v_n = u_n + \frac{1}{n}.$$

Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes. En déduire la nature de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 29

Soient $(u_n)_{n\geq 2}$ et $(v_n)_{n\geq 2}$ les suites définies par :

$$\forall n \geq 2,\ u_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2-1} \ \text{ et } \ v_n = u_n + \frac{1}{n}.$$

1. Montrer que $(u_n)_{n\geq 2}$ et $(v_n)_{n\geq 2}$ sont adjacentes. Que peut-on en déduire ?
2. En remarquant que, pour tout $k \geq 2$,
$$\frac{1}{k^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1}\right),$$
donner une expression simplifiée de u_n. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

Exercice 30

On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \qquad \text{et} \qquad v_n = u_n + \frac{1}{2n+1}.$$

Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes. En déduire la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 31

On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$u_0 = 2,\ v_0 = -1 \ \text{ et } \ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{3u_n + 2v_n}{5} \ \text{ et } \ v_{n+1} = \frac{u_n + 4v_n}{5}.$$

1. On pose $t_n = u_n - v_n$.
   (a) Montrer que $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique puis exprimer t_n en fonction de n.
   (b) En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n \geq v_n$.
2. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes et qu'elles convergent vers une même limite ℓ.
3. On pose $s_n = u_n + 2v_n$. Montrer que la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.
4. En déduire la valeur de ℓ.
5. En utilisant les questions 1. et 3., déterminer l'expression de u_n et de v_n en fonction de n puis retrouver la valeur de ℓ obtenue à la question précédente.

Exercice 32

On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies pour tout entier naturel n non nul par :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1).$$

1. On pose $f(x) = \ln(1+x) - x$. Quel est l'ensemble de définition de f ? Dresser le tableau de variation de f et montrer que f est négative sur son ensemble de définition.
2. (a) En utilisant la question 2. avec $x = -\dfrac{1}{n+1}$, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :
   $$\frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) \leq 0.$$
   (b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.
3. (a) En utilisant la question 2. avec $x = \dfrac{1}{n+1}$, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :
   $$\frac{1}{n+1} - \ln(n+2) + \ln(n+1) \geq 0.$$
   (b) En déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.
4. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes. En déduire qu'elles convergent vers une même limite.