TD5

Comportement asymptotique des fonctions

Exercice 1

Déterminer les limites suivantes (on distinguera éventuellement les limites à gauche et à droite) :

(1) $\lim_{x\to+\infty}(x^2-2x)$ (2) $\lim_{x\to+\infty} x^2\sqrt{x}$ (3) $\lim_{x\to1}\frac{1+x}{1-\sqrt{x}}$

(4) $\lim_{x\to+\infty}(x^2-\sqrt{x})$ (5) $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+x+1}{x-1}$ (6) $\lim_{x\to0}\frac{1}{x^2}(1+\sqrt{x})$

(7) $\lim_{x\to0}\frac{\ln(x)}{x^3}$ (8) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x^2+2)}{x+1}$ (9) $\lim_{x\to-2}\frac{x-3}{x+2}$

(10) $\lim_{x\to1}\frac{x^3-1}{x-1}$ (11) $\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x+7}-3}{x-2}$ (12) $\lim_{x\to1}\frac{x^2+3x-1}{x-1}$

(13) $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x}$ (14) $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-x+1}{x+\ln(x)}$ (15) $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x}\ln(x)}{x+1}$

(16) $\lim_{x\to+\infty} x^4e^{-x}$ (17) $\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x^2+1}{x^2+2x+2}\right)$ (18) $\lim_{x\to0} e^{1/x}$

(19) $\lim_{x\to-\infty}(3+x^2)e^x$ (20) $\lim_{x\to\pm\infty}(x^3-e^{2x})$ (21) $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

(22) $\lim_{x\to2}\sqrt{\frac{1}{x^2-4}}$ (23) $\lim_{x\to-1}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$ (24) $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$

Exercice 2

A l'aide d'un changement de variable, déterminer les limites suivantes :

(1) $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\ln\left(\frac{1}{x}\right)$ (poser $X=\frac{1}{x}$) (2) $\lim_{x\to+\infty} x^2e^{-\sqrt{x}}$ (poser $X=\sqrt{x}$)

(3) $\lim_{x\to1}(x^2-1)\ln(x-1)$ (poser $X=x-1$) (4) $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}\ln(x)$ (poser $X=\frac{1}{x}$)

(5) $\lim_{x\to1}\frac{1}{\ln(x)}\exp\left(\frac{1}{\ln(x)}\right)$ (poser $X=\frac{1}{\ln(x)}$) (6) $\lim_{x\to0} x^2e^{1/x}$ (poser $X=\frac{1}{x}$)

(7) $\lim_{x\to1}(x-1)\ln\left(\frac{1}{x-1}\right)$ (poser $X=\frac{1}{x-1}$) (8) $\lim_{x\to3}\frac{e^{\frac{1}{x-3}}}{x^2-5x+6}$ (poser $X=\frac{1}{x-3}$)

Exercice 3

Déterminer les limites suivantes (on distinguera éventuellement les limites à gauche et à droite) :

(1) $\lim_{x\to0} x^x$ (2) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^x$ (3) $\lim_{x\to+\infty} x^{1/x}$

(4) $\lim_{x\to0} x^{1/x}$ (5) $\lim_{x\to1}(\ln(x))^{\ln(x)}$ (6) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^{1/x^2}$

Exercice 4

1. (a) Montrer que, pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a : $1+x\leq e^x\leq 1+xe^x$.

   (b) En déduire $\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}$.

2. (a) Montrer que, pour tout $x\in\mathbb{R}_+$, on a : $x-\frac{x^2}{2}\leq\ln(1+x)\leq x$.

   (b) En déduire $\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(1+x)}{x}$.

Exercice 5

On rappelle que la partie entière $\lfloor x \rfloor$ d'un réel x est le plus grand entier plus petit que x.
Autrement dit, $\lfloor x \rfloor$ est l'unique entier vérifiant :

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1.$$

1. Déterminer les limites suivantes (on pourra éventuellement distinguer les limites à gauche et à droite) :

   (a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{\lfloor x \rfloor}$ (b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor$ (c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\lfloor x \rfloor}{x}$

2. Déterminer les limites suivantes (en utilisant les théorèmes de passage à la limite dans les inégalités) :

   (a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\lfloor x \rfloor}{x}$ (b) $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{\lfloor x \rfloor}$ (c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x + \lfloor x \rfloor}{1 + \lfloor x \rfloor}$

Exercice 6

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = x \left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor$.

1. Exprimer $f(x)$ pour $x > 1$. En déduire la limite de f en $+\infty$.
2. Exprimer $f(x)$ pour $x < -1$. En déduire la limite de f en $-\infty$.
3. (a) Montrer que : $\forall x > 0,\ 1 - x < f(x) \leq 1$. En déduire que f admet une limite à droite en 0.

   (b) Montrer de même que f admet une limite à gauche en 0.

Exercice 7

Calculer les limites des fonctions suivantes aux bornes de leurs ensembles de définition (que l'on aura préalablement déterminé) et préciser si leurs courbes représentatives admettent des asymptotes verticales ou horizontales :

$$f(x) = x - \ln(x) \qquad g(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \qquad h(x) = \frac{x^2 - 4}{-x^2 + 3x - 2}$$

$$i(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right) \qquad j(x) = \frac{x}{\ln(x)} \qquad k(x) = \frac{\sqrt{x^2 - x + 1}}{x + 2}$$

$$l(x) = e^{1/x^2} \qquad m(x) = x^{1/x} \qquad n(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^{\ln(x)}$$

Exercice 8

On considère la fonction f définie par $f(x) = 2\sqrt{x^2 + 4x} + x$. On notera $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

1. Donner l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f.
2. Déterminer les limites de f aux bornes de $\mathcal{D}_f$.
3. Montrer que $\mathcal{C}_f$ admet en $+\infty$ la droite Δ d'équation $y = 3x + 4$ comme asymptote oblique.
4. Déterminer la position relative de $\mathcal{C}_f$ par rapport à Δ au voisinage de $+\infty$.

Exercice 9

On considère la fonction $f(x) = \dfrac{x^2 + e^x}{x+1}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f.
2. Déterminer les limites de f aux bornes de $\mathcal{D}_f$. Préciser si la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f admet une asymptote verticale ou horizontale.
3. (a) Déterminer le réel a tel que $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = a$.
   (b) Calculer $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} (f(x) - ax)$.
   (c) En déduire que $\mathcal{C}_f$ admet, en $-\infty$, une asymptote oblique Δ dont on donnera l'équation.
   (d) Étudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ par rapport à Δ.

Exercice 10

On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{3x^3 + 2x^2 + 5}{x^2 + x + 1}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
3. (a) Déterminer quatre réels a, b, c, d tels que :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \frac{3x^3 + 2x^2 + 5}{x^2 + x + 1} = ax + b + \frac{cx + d}{x^2 + x + 1}.$$
   (b) En déduire que $\mathcal{C}_f$ admet en $+\infty$ et en $-\infty$ une asymptote oblique Δ dont on précisera l'équation.
   (c) Déterminer la position relative de $\mathcal{C}_f$ par rapport à Δ.

Exercice 11

Soit f la fonction définie par :
$$f(x) = \ln(e^x - 1).$$
On notera $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f.
2. Déterminer les limites de f aux bornes de $\mathcal{D}_f$. Préciser si $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote verticale ou horizontale.
3. Calculer la dérivée de f, en précisant sur quel ensemble f est continue et dérivable. Dresser le tableau de variation de f.
4. (a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α qu'on explicitera.
   (b) Calculer $f'(\alpha)$.
5. (a) Démontrer que, pour tout $x > 0$, $f(x) - x = \ln(1 - e^{-x})$.
   (b) En déduire que $\mathcal{C}_f$ admet, en $+\infty$, une asymptote oblique Δ dont on donnera l'équation.
   (c) Étudier la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à Δ au voisinage de $+\infty$.
6. Tracer $\mathcal{C}_f$ dans un repère orthonormé.

Exercice 12
Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x^2+2x+2}{x-1}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f.
2. Donner les limites de f aux bornes de $\mathcal{D}_f$. Interpréter graphiquement le résultat.
3. Dresser le tableau de variation de f.
4. (a) Déterminer trois réels a, b, c tels que :
$$\forall x \in \mathcal{D}_f,\ \frac{x^2+2x+2}{x-1} = ax+b+\frac{c}{x-1}.$$
   (b) En déduire que $\mathcal{C}_f$ admet en $+\infty$ et en $-\infty$ une asymptote oblique Δ dont on précisera l'équation.
   (c) Déterminer la position relative de $\mathcal{C}_f$ par rapport à Δ.
5. Tracer l'allure de $\mathcal{C}_f$ ainsi que ses asymptotes (on donne à cet effet les approximations: $1+\sqrt{5} \simeq 3.24$, $1-\sqrt{5} = -1.24$, $f(1+\sqrt{5}) = 8.47$ et $f(1-\sqrt{5}) = -0.47$).

Exercice 13
On considère la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x^2-4x}$. On notera $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

1. Donner l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f.
2. Déterminer les limites de f aux bornes de $\mathcal{D}_f$.
3. Montrer que $\mathcal{C}_f$ admet en $+\infty$ la droite Δ_1 d'équation $y = x-2$ comme asymptote oblique.
4. (a) Déterminer le réel a tel que $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = a$.
   (b) Calculer $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} (f(x)-ax)$.
   (c) En déduire que $\mathcal{C}_f$ admet en $-\infty$ une asymptote oblique Δ_2 dont on donnera l'équation.

Exercice 14
1. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{1+x}{1+e^x} - x$ et on note $\mathcal{C}_g$ sa courbe représentative.
   (a) Déterminer l'ensemble de définition de g.
   (b) Écrire $g(x)$ sous la forme d'un quotient et en déduire $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} g(x)$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x)$. Que peut-on en déduire sur $\mathcal{C}_g$?
   (c) Déterminer le réel a tel que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = a$ puis calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} (g(x)-ax)$. Que peut-on en déduire sur $\mathcal{C}_g$?
2. (a) Justifier que g est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ puis expliciter sa dérivée sous la forme $g'(x) = \dfrac{h(x)}{(1+e^x)^2}$.
   (b) Montrer que l'équation $\dfrac{1+x}{1+e^x} = x$ admet une solution et une seule sur $\mathbb{R}_+$. On note x_0 cette solution.
   (c) Justifier que $0 < x_0 < 1$.