TD6

Systèmes linéaires

Exercice 1

Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacun des systèmes suivants. On utilisera la méthode du pivot de Gauss et on écrira explicitement l'ensemble des solutions.

$$(S_1) : \left\{\begin{array}{rcrcrcr} -6x & - & 5y & - & 6z & = & 1 \\ 5x & + & 4y & + & 5z & = & -1 \\ x & + & 2y & + & 2z & = & -2 \end{array}\right. \qquad (S_2) : \left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & y & + & 4z & = & -2 \\ -x & + & 2y & - & 3z & = & -3 \\ x & + & 4y & - & z & = & 1 \end{array}\right.$$

$$(S_3) : \left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & y & + & 4z & = & -1 \\ -x & + & 2y & - & 3z & = & 1 \\ x & + & 4y & - & z & = & 1 \end{array}\right. \qquad (S_4) : \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 3y & + & 2z & = & 1 \\ -x & + & 2y & - & z & = & -1 \end{array}\right.$$

$$(S_5) : \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 2z & = & 2 \\ 3x & + & y & - & 2z & = & 1 \\ 4x & - & 3y & - & z & = & 3 \\ 2x & + & 4y & + & 2z & = & 4 \end{array}\right. \qquad (S_6) : \left\{\begin{array}{rcrcrcr} -3x & + & y & & & = & -1 \\ x & - & y & + & z & = & 0 \\ -3x & & & - & z & = & 1 \\ -4x & & & - & z & = & 1 \end{array}\right.$$

$$(S_7) : \left\{\begin{array}{rcrcrcr} -3x & + & y & & & = & -1 \\ x & - & y & + & z & = & 4 \\ -3x & & & - & z & = & -2 \\ -4x & & & - & z & = & 1 \end{array}\right. \qquad (S_8) : \left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x & + & y & - & 2z & + & t & + & 3u & = & 1 \\ 2x & - & y & + & 2z & + & 2t & + & 6u & = & 2 \\ 3x & + & 2y & - & 4z & - & 3t & - & 9u & = & 3 \end{array}\right.$$

$$(S_9) : \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & y & + & z & + & t & = & 1 \\ x & + & 2y & + & 2z & + & 4t & = & 2 \\ x & + & 3y & + & 3z & + & 7t & = & 4 \end{array}\right. \qquad (S_{10}) : \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & y & + & 2z & + & t & = & 5 \\ 2x & + & 3y & - & z & - & 2t & = & 2 \\ 4x & + & 5y & + & z & & & = & 7 \end{array}\right.$$

Exercice 2

1. Déterminer a, b, c pour que le polynôme $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ ait pour racines $-1, 1$ et 2.

2. Montrer qu'il existe un unique polynôme P de degré 3 tel que $P(0) = 1$, $P(1) = 5$, $P(2) = 31$ et $P(-1) = 1$. Déterminer ce polynôme.

Exercice 3

Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacun des systèmes homogènes suivants en utilisant la méthode du pivot de Gauss. Dans chacun des cas, on explicitera l'ensemble des solutions sous la forme d'une combinaison linéaire de vecteurs et on donnera une famille génératrice de l'ensemble des solutions.

$$(S_1) : \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & 0 \\ 4x & + & 5y & + & 6z & = & 0 \\ 7x & + & 8y & + & 9z & = & 0 \end{array}\right. \qquad (S_2) : \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & 0 \\ 2x & + & 4y & + & 6z & = & 0 \\ 5x & + & 10y & + & 15z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$(S_3) : \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 3x & & & + & 2z & & & = & 0 \\ & & 3y & + & z & + & 3t & = & 0 \\ x & + & y & + & z & + & t & = & 0 \\ 2x & - & y & + & z & - & t & = & 0 \end{array}\right. \qquad (S_4) : \left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} & & & & 2z & - & 2t & + & 8u & = & 0 \\ x & + & 2y & + & z & & & + & 5u & = & 0 \\ -2x & - & 4y & - & z & & & - & 8u & = & 0 \end{array}\right.$$