TD7

Logique, ensembles et applications

Éléments de logique

Exercice 1

1. Démontrer par récurrence les formules suivantes sur les sommes usuelles : pour tout entier $n \geq 1$,

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \qquad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

2. (a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 1$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(2k+1) = n^2$.

   (b) Retrouver ce résultat en utilisant les propriétés sur les sommes vues au chapitre 1.

Exercice 2

1. Montrer par récurrence que : $\forall x \in \mathbb{R}_+$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $(1+x)^n \geq 1 + nx$.
2. En déduire que, si $q > 1$, alors $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} q^n = +\infty$.

Exercice 3

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et par la relation : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + 2}$.

1. Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_n = \sqrt{2n+1}$.
2. En déduire la nature de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 4

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et par la relation : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{\sqrt{1+u_n^2}}$.

1. Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4.
2. Émettre une hypothèse quant à la valeur de u_n en fonction de n. Le démontrer par récurrence.
3. Déterminer le comportement asymptotique de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 5

On considère la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ définie par $u_2 = 1$ et par la relation : $\forall n \geq 2$, $u_{n+1} = u_n\left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right)$.

1. Montrer que, pour tout entier $n \geq 2$, $0 \leq u_n \leq 1$.
2. Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\geq 2}$.
3. En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ est convergente.
4. Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, $u_n = \dfrac{n}{2(n-1)}$ et en déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 6

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et par la relation : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$.

1. Montrer que pour tout entier naturel n, u_n est bien défini et que $0 \leq u_n \leq 2$.
2. Quelles sont les limites finies possibles de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
3. Montrer que $\forall x \in [0, 2]$, $\sqrt{x+2} \geq x$. En déduire la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. Justifier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et déterminer sa limite.

Exercice 7

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 3$ et par la relation : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2}{2u_n - 1}$.

1. Montrer que pour tout entier naturel n, u_n existe et $u_n \geq 1$.
2. Déterminer la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Justifier la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et expliciter sa limite.

Exercice 8

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par $u_1 = 2$ et par la relation : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = 1 + \dfrac{u_n}{n+1}$.

1. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, $1 \leq u_n \leq 2$.
2. En déduire un encadrement de u_{n+1} puis montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 1.

Exercice 9

On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $u_0 = 2$, $v_0 = 1$ et les relations :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n}.$$

1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n et v_n sont bien définis et que $0 < v_n < u_n$.
2. Démontrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :
$$u_{n+1} - v_{n+1} < \frac{1}{2}(u_n - v_n).$$
4. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$u_n - v_n \leq \frac{1}{2^n}.$$
5. En déduire que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.
6. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n v_n = 2$. En déduire la limite commune de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Ensembles

Exercice 10

Soient $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ et $A = \{2, 5, 3\}$.

1. Pour chaque affirmation ci-dessous, indiquer sans justification si elle est vraie ou fausse :

   a) $4 \in E$ b) $4 \subset E$ c) $\{4\} \subset E$ d) $\{4\} \in E$

2. Pour chaque affirmation ci-dessous, indiquer sans justification si elle est vraie ou fausse :

   a) $A \subset E$ b) $A \in E$ c) $A \subset \mathcal{P}(E)$ d) $A \in \mathcal{P}(E)$

3. Pour chaque affirmation ci-dessous, indiquer sans justification si elle est vraie ou fausse :

   a) $\{2, 3\} \subset A$ b) $\{2, 3\} \subset \mathcal{P}(A)$ c) $\emptyset \in A$ d) $\emptyset \subset A$

Exercice 11

Dans chacune des questions suivantes, on donne un ensemble E et des parties A et B de E. Déterminer explicitement les ensembles $A \cap B$, $A \cup B$, $\overline{A} \cap \overline{B}$, $A \cup \overline{B}$, $A \setminus B$ et $B \setminus A$.

1. $E = \{1, 2, 3, 4\}$, $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 4\}$.
2. $E = \mathbb{R}$, $A =]-\infty, 3]$, $B = [2, +\infty[$.
3. $E = \mathbb{R}$, $A =]-\infty, 2]$, $B = [3, +\infty[$.
4. $E = \mathbb{R}$, $A = \mathbb{N}$, $B =]0, +\infty[$.

Exercice 12

Soit $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ et soit les parties suivantes de E :

$$A = \{1, 2, 3, 4\}\,, \quad B = \{4, 5, 6, 7\}\,, \quad C = \{1, 3, 5, 7\}\,, \quad D = \{2, 3, 4, 5, 6\}\,.$$

Déterminer les ensembles suivants :

1. $(A \cap B) \cup (C \cap D)$.
2. $(A \cup C) \cap (B \cup D)$
3. $(\overline{A} \cap D) \cap (\overline{B \cup C})$.

Exercice 13

1. Déterminer $A \times B$, où $A = \{1, 2, 3, 4\}$ et $B = \{3, 4, 5\}$.
2. Donner un élément de $A \times B$, où $A =]-\infty, 0]$ et $B =]2, +\infty[$.
3. Dessiner les parties suivantes de $E = \mathbb{R}^2$:

   a) $[-1, 1] \times [2, 3]$ b) $\overline{[-1, 1]} \times \overline{[2, 3]}$ c) $\overline{[-1, 1] \times [2, 3]}$

Exercice 14

Soit E un ensemble et soient X et Y des sous-ensembles de E. Déterminer les ensembles suivants :

1. $A = (X \cap Y) \cup (X \cap \overline{Y})$.
2. $B = (X \cup Y) \cap (X \cup \overline{Y})$.
3. $C = (X \cap Y) \cup (X \cap \overline{Y}) \cup (\overline{X} \cap Y) \cup (\overline{X} \cap \overline{Y})$.
4. $D = (X \cup Y) \cap (X \cup \overline{Y}) \cap (\overline{X} \cup Y) \cap (\overline{X} \cup \overline{Y})$.

Exercice 15

1. Soient E, F, G trois ensembles tels que $E \subset F$ et $F \subset G$. Montrer que $E \subset G$.
2. Soient E, F, G trois ensembles tels que $E \subset F$, $F \subset G$ et $G \subset E$. Montrer que $E = F = G$.

Exercice 16

Soient A, B, A', B' quatre ensembles tels que $A \subset A'$ et $B \subset B'$.

1. Montrer que $A \cap B \subset A' \cap B'$.
2. Montrer que $A \cup B \subset A' \cup B'$.
3. Montrer que $A \times B \subset A' \times B'$.

Exercice 17

Soient E un ensemble et A et B deux éléments de $\mathcal{P}(E)$.

1. Montrer que $A \subset B$ si et seulement si $A \cap B = A$.
2. Montrer que $A \subset B$ si et seulement si $A \cup B = B$.
3. Montrer que $A \cup B = A \cap B$ si et seulement si $A = B$.

Exercice 18

Soient E et F deux ensembles non vides, A et B deux parties de E, C et D deux parties de F.

1. Montrer que :
   (a) $(A \times C) \cup (B \times C) = (A \cup B) \times C$.
   (b) $(A \times C) \cup (A \times D) = A \times (C \cup D)$.
2. Montrer que : $(A \times B) \cup (C \times D) \subset (A \cup C) \times (B \cup D)$.
   A-t-on l'égalité entre ces deux ensembles ?
3. Montrer que : $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$

Exercice 19

Soit E un ensemble et A et B deux parties de E. Rappelons que :

$$A \setminus B = A \cap \overline{B} = \{x \in A \mid x \notin B\}.$$

1. Déterminer $A \setminus A$ et $A \setminus \emptyset$.

2. Montrer que : $A \setminus B = A \Leftrightarrow B \setminus A = B$.

3. Montrer que : $(A \setminus B) \setminus B = A \setminus B$.

Exercice 20

Soit E un ensemble et A et B deux parties de E. On définit la différence symétrique de A et de B, notée $A \Delta B$ par :

$$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

1. Déterminer $A \Delta A$ et $A \Delta \emptyset$.

2. Montrer que : $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

3. Montrer que : $(A \Delta B) \Delta B = A$.

Exercice 21

On considère une partition $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ d'un ensemble E (avec $n \geq 1$) et B une partie non vide de E.

Montrer que $B = \displaystyle\bigcup_{k=1}^{n} (B \cap A_k)$ et vérifier que cette réunion est formée d'ensembles deux à deux disjoints.

Exercice 22

On considère une suite d'ensembles $(A_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$. Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on pose :

$$I_n = \bigcap_{k=1}^{n} A_k \quad \text{et} \quad U_n = \bigcup_{k=1}^{n} A_k.$$

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $I_{n+1} \subset I_n$ et $U_n \subset U_{n+1}$.

Exercice 23 (Formules de Morgan)

On considère une suite d'ensembles $(A_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$.

1. Montrer par récurrence la première formule de Morgan :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \overline{\bigcap_{k=1}^{n} A_k} = \bigcup_{k=1}^{n} \overline{A_k}$$

2. En déduire, sans récurrence, la deuxième formule de Morgan :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \overline{\bigcup_{k=1}^{n} A_k} = \bigcap_{k=1}^{n} \overline{A_k}$$

Applications

Exercice 24

On considère les applications suivantes :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 3x-1 \end{array} \right. \qquad g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R}_+^* \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{x^2} \end{array} \right. \qquad h : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x+y \end{array} \right. \qquad i : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln(x) \end{array} \right.$$

1. L'application $f \circ g$ existe-t-elle ? Si oui, la calculer.

2. Mêmes questions avec $g\circ f$, $f\circ h$, $h\circ f$, $f\circ i$, $i\circ f$, $g\circ h$, $h\circ g$, $g\circ i$, $i\circ g$, $h\circ i$ et $i\circ h$.

Exercice 25
On considère les applications suivantes :

$$f:\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R}^*\\ x & \mapsto & \dfrac{1}{x^2}\end{array}\right. \qquad g:\left\{\begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \to &]0,+\infty[\\ x & \mapsto & \dfrac{1}{x^2}\end{array}\right. \qquad h:\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & 2x+1\end{array}\right.$$

1. L'application $f\circ h$ existe-t-elle ? Si oui déterminer-la.
2. Mêmes questions avec $h\circ f$.
3. Montrer que f n'est pas bijective.
4. Montrer que g est bijective et déterminer son application réciproque.
5. Vérifier que $h^{-1}:\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}\\ y & \mapsto & \dfrac{y-1}{2}\end{array}\right.$ est l'application réciproque de h.

Exercice 26
On considère les applications suivantes :

$$f:\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3\\ (x,y,z) & \mapsto & (x+y,z,y-z)\end{array}\right. \qquad g:\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3\\ (x,y,z) & \mapsto & (x-y-z,y+z,y)\end{array}\right.$$

1. Montrer que f est bijective et que $f^{-1}=g$.
2. Considérons l'application suivante :

$$h:\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3\\ (x,y,z) & \mapsto & (x+y+z,y-z,2z-y)\end{array}\right.$$

   (a) Montrer que $h=f\circ f$.
   (b) En déduire que h est bijective et préciser h^{-1}.

Exercice 27
On considère les applications suivantes :

$$f:\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}\\ (x,y) & \mapsto & 2x+y\end{array}\right. \qquad g:\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2\\ x & \mapsto & (x,-x)\end{array}\right.$$

1. (a) Montrer que f n'est pas injective.
   (b) Montrer que g n'est pas surjective.
2. (a) Déterminer $f\circ g$.
   (b) En déduire que f est surjective et que g est injective.

Exercice 28
Les applications suivantes sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ? Dans ce dernier cas, on donnera l'expression de la bijection réciproque.

$f_1 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ n \mapsto 2n$ $\quad f_2 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ n \mapsto -n$ $\quad f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$
$f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+,\ x \mapsto x^2$ $\quad f_5 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto e^x$ $\quad f_6 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x,y) \mapsto (y,x)$
$f_7 : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ n \mapsto n+1$ $\quad f_8 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ n \mapsto n+1$ $\quad f_9 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x,y) \mapsto (x-y, x+y)$

Exercice 29

Soient f une application d'un ensemble E dans un ensemble F et A et B deux parties de E.

1. Démontrer que $A \subset B \ \Rightarrow\ f(A) \subset f(B)$.
2. Démontrer que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.
3. Démontrer que $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

Exercice 30

Soient E, F et G trois ensembles, f une application de E dans F et g une application de F dans G.

1. (a) Montrer que, si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective.
   (b) Montrer que, si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.
2. (a) Montrer que, si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective.
   (b) Montrer que, si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.

Exercice 31

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$.

1. Étudier les variations de f.
2. f est-elle injective ? surjective ?
3. Montrer que la restriction $g : [-1,1] \to [-1,1],\ x \mapsto g(x) = f(x)$ est une bijection.

Exercice 32

Soit f l'application définie, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, par : $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$.

1. Étudier les variations de f.
2. En déduire que f est une bijection de $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ dans $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
3. Déterminer $f \circ f$. Que peut-on en déduire ?

Exercice 33

On considère les fonctions f et g définies par $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ et $g(x) = \sqrt{\dfrac{1-x}{x}}$.

1. Étudier les variations de f et montrer que f réalise une bijection de $[0,+\infty[$ dans un intervalle à préciser.
2. Étudier les variations de g et montrer que g réalise une bijection de $]0,1]$ dans un intervalle à préciser.
3. Déterminer $f \circ g$ et $g \circ f$. Que peut-on en déduire ?

Exercice 34

Considérons l'application f définie par $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln\left(\dfrac{e^x+1}{2}\right) \end{array} \right.$.

1. Étudier les variations de f et montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans un intervalle J à préciser.
2. On considère l'application g définie par $g : \left\{ \begin{array}{ccc}]-\ln(2), +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln\left(2e^x - 1\right) \end{array} \right.$.

   Calculer $f \circ g$ et $g \circ f$. Que peut-on en déduire ?

Exercice 35

Soient f et g deux fonctions définies par $f(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$ et $g(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

1. Déterminer les ensembles de définition de f et g.
2. Étudier les variations de f et de g.
3. Démontrer que g est la bijection réciproque de f.