TD8

Continuité

Continuité

Exercice 1

Étudier la continuité au point x_0 des fonctions suivantes :

1. $x_0 = 2$ et $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x < 2, \\ x^2 - 1 & \text{si } x \geq 2. \end{cases}$
2. $x_0 = -1$ et $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+2x+2}{x+1} & \text{si } x \neq -1, \\ 0 & \text{si } x = -1. \end{cases}$
3. $x_0 = 0$ et $h(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{1+e^{1/x}} & \text{si } x \neq 0, \\ 2 & \text{si } x = 0. \end{cases}$
4. $x_0 = 0$ et $i(x) = \begin{cases} x\ln(x) & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \\ \lfloor x \rfloor + 1 & \text{si } x < 0. \end{cases}$
5. $x_0 = 3$ et $j(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-x-6}{x-3} & \text{si } x \neq 3, \\ 5 & \text{si } x = 3. \end{cases}$
6. $x_0 = 0$ et $k(x) = \begin{cases} x\left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor & \text{si } x \neq 0, \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

Exercice 2

Étudier la continuité des fonctions suivantes :

$f_1(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2+1} & \text{si } x < 0, \\ e^{-x} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$ $\quad f_2(x) = \begin{cases} 1-x & \text{si } x < 1, \\ \ln(x) & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$ $\quad f_3(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0, \\ \dfrac{\ln(x)}{x} & \text{si } x > 0. \end{cases}$

$f_4(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3-8}{x-2} & \text{si } x \neq 2, \\ 12 & \text{si } x = 2. \end{cases}$ $\quad f_5(x) = \begin{cases} xe^{\frac{1}{x}} & \text{si } x < 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \\ \ln(x) & \text{si } x > 0. \end{cases}$ $\quad f_6(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

$f_7(x) = \begin{cases} \ln(x^2) & \text{si } x \neq 0, \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$ $\quad f_8(x) = \begin{cases} x^x & \text{si } x > 0, \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$ $\quad f_9(x) = x\lfloor x \rfloor$

Exercice 3

Déterminer l'ensemble de définition et de continuité des fonctions suivantes, puis chercher si elles admettent un prolongement par continuité aux bornes de leur ensemble de définition :

$f_1(x) = \dfrac{x^3+5x+6}{x^3+1}$ $\quad f_2(x) = e^{-1/x^2}$ $\quad f_3(x) = \dfrac{2}{x-2} - \dfrac{3}{(x-2)^2}$

$f_4(x) = \ln(\ln(x))$ $\quad f_5(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$ $\quad f_6(x) = \dfrac{1}{e^{1/x}+1}$

$f_7(x) = \dfrac{x^2-2x-8}{\sqrt{x+2}}$ $\quad f_8(x) = \dfrac{x\ln(x)}{x+1}$ $\quad f_9(x) = \dfrac{1}{\ln(x)}$

$f_{10}(x) = \left(\dfrac{1}{x}\right)^{\ln(x)}$ $\quad f_{11}(x) = (x-1)^x$ $\quad f_{12}(x) = \ln(x)^{\ln(x)}$

$f_{13}(x) = \dfrac{x^2}{|x|}$ $\quad f_{14}(x) = \dfrac{x^2-|x|}{x^2+|x|}$ $\quad f_{15}(x) = x\left|1+\dfrac{1}{x}\right|$

Exercice 4

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et soit $f(x) = x^\alpha$.

1. Déterminer l'ensemble de définition et de continuité de f.
2. En discutant selon la valeur de α, déterminer si f est prolongeable par continuité.

Exercice 5

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer les réels a et b pour qu'elles soient continues :

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x > 0, \\ ax + b & \text{si } 0 \geq x \geq -1, \\ \dfrac{2+x}{x} & \text{si } -1 > x \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} \ln(x) + a & \text{si } x \geq 1, \\ 1 - x & \text{si } 1 > x \geq -1, \\ \dfrac{b}{x^2 + x + 1} & \text{si } -1 > x \end{cases}$$

Image d'un intervalle par une fonction continue

Exercice 6

Montrer que les équations suivantes ont au moins une solution dans l'intervalle I :

1. $\ln(x) = 2 - x$ sur $I = [1, 2]$.
2. $x^{2020} - x^{2019} = 1$ sur $I = [-1, 1]$.
3. $x \ln(x) = 2$ sur $I = [2, 3]$.

Exercice 7

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + x^2 - 4x + 1$.

1. Calculer $f(-3)$, $f(0)$, $f(1)$ et $f(2)$.
2. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement trois solutions distinctes sur $\mathbb{R}$.
3. On note x_1, x_2, x_3 avec $x_1 < x_2 < x_3$ les trois racines de f. Justifier que : $-3 < x_1 < -2$.

Exercice 8

1. Soit $f : [0, 1] \to [0, 1]$ continue. On pose $\varphi(x) = f(x) - x$.
   (a) Montrer que $\varphi(0) \geq 0$ et $\varphi(1) \leq 0$.
   (b) En déduire qu'il existe $c \in [0, 1]$ tel que $f(c) = c$.
2. Soient $f, g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continues telles que $f(0) \leq g(0)$ et $f(1) \geq g(1)$.
   (a) On pose $\varphi(x) = f(x) - g(x)$. Déterminer le signe de $\varphi(0)$ et de $\varphi(1)$.
   (b) En déduire qu'il existe $c \in [0, 1]$ tel que $f(c) = g(c)$.

Exercice 9

On considère la fonction $f(x) = e^x - x - 1$.

1. Étudier les variations de f.

2. Déterminer l'ensemble image par f des intervalles suivants :

$$I_1 = [0,1] \qquad I_2 = [-2,0] \qquad I_3 = [-1,1] \qquad I_4 = [-4,1]$$

3. On dit qu'un intervalle I est stable par f si, pour tout $x \in I$, $f(x) \in I$. Parmi les intervalles de la question précédente, préciser ceux qui sont stables par f.

Exercice 10

1. (a) Montrer que l'équation $x^2 = 3 - \ln(x)$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}_+^*$.
   (b) Vérifier que cette solution appartient à l'intervalle $]1,2[$.
2. (a) Montrer que l'équation $3 - 2x = e^x$ possède une unique solution α dans $\mathbb{R}$.
   (b) Vérifier que $0 \leq \alpha \leq 1$. Est-ce que $\dfrac{1}{2} \leq \alpha \leq 1$?
   Valeurs numériques : $e \simeq 2.718$ et $e^{1/2} \simeq 1.648$.

Exercice 11

On considère la fonction $f(x) = x + \ln(x)$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur un intervalle à expliciter.
2. Justifier que l'équation $x + \ln(x) = 2005$ admet une seule solution α sur $]0,+\infty[$ et vérifier qu'on a l'encadrement : $1997 \leq \alpha \leq 1998$.
   Valeurs numériques : $\ln(1997) \simeq \ln(1998) \simeq 7.6$.

Exercice 12

On considère la fonction $f(x) = \sqrt{2 - \ln(x)}$.

1. (a) Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f. f est-elle continue et dérivable sur $\mathcal{D}_f$?
   (b) Déterminer les limites de f aux bornes de $\mathcal{D}_f$.
   (c) Étudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
2. (a) Montrer que l'intervalle $[1,e]$ est stable par f, c'est-à-dire : $\forall x \in [1,e]$, $f(x) \in [1,e]$.
   (b) Montrer que l'équation $f(x) = x$ est équivalente à l'équation $x^2 + \ln(x) - 2 = 0$.
   (c) En déduire que l'équation $f(x) = x$ ne possède qu'une seule solution sur l'intervalle $[1,e]$.

Exercice 13

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$.

1. Étudier les variations de f. On étudiera également sa parité.
2. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J à expliciter.
3. On note f^{-1} la bijection réciproque de f. Préciser les variations de f^{-1} sur J ainsi que ses limites aux bornes de J.
4. Soit $y \in J$. Déterminer un antécédent de y par f. En déduire f^{-1}.
5. Retrouver les résultats de la question 3 en utilisant l'expression de f^{-1}.
6. Tracer dans un même repère orthonormé les courbes représentatives de f et de f^{-1}.

Exercice 14
Soit f la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.

1. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans un intervalle J à déterminer.
2. Déterminer la bijection réciproque f^{-1} de f.
3. Tracer dans un même repère orthonormé les courbes représentatives de f et de f^{-1}.

Suites définies implicitement

Exercice 15
Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on définit la fonction f_n par :

$$f_n(x) = nx - e^{-x}.$$

1. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$ qu'on notera u_n.
2. Calculer $f_n(0)$ et $f_n(\dfrac{1}{n})$. En déduire un encadrement de u_n puis $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.
3. Montrer que $nu_n = e^{-u_n}$ et en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n$.

Exercice 16
Posons $f_n(x) = x^n + 1 - nx$.

1. Montrer que, pour chaque entier $n \geq 2$, l'équation $x^n + 1 = nx$ possède une unique solution dans l'intervalle $[0, 1]$. On note x_n cette racine.
2. (a) Étudier le signe de $f_{n+1}(x) - f_n(x)$ sur $[0, 1]$.
   (b) En évaluant en $x = x_n$, en déduire le signe de $f_{n+1}(x_n)$.
   (c) Déterminer la monotonie de la suite $(x_n)_{n\geq 2}$.
3. (a) Justifier que : $\forall n \geq 2,\ \dfrac{1}{n} \leq x_n \leq \dfrac{2}{n}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$.
   (b) En utilisant l'égalité $f_n(x_n) = 0$, déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} nx_n$.

Exercice 17
Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on définit la fonction f_n par :

$$f_n(x) = x^n + 9x^2 - 4.$$

1. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ n'a qu'une seule solution positive, notée u_n.
2. Calculer u_1 et u_2.
3. Vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \in]0, \dfrac{2}{3}[$.
4. (a) Montrer que, pour tout $x \in]0, 1[$, on a : $f_{n+1}(x) < f_n(x)$.
   (b) En évaluant l'inégalité précédente en $x = u_n$, déterminer le signe de $f_{n+1}(u_n)$.
   (c) Quelle est alors la monotonie de la suite (u_n) ?
5. (a) Montrer que la suite (u_n) est convergente. On note ℓ sa limite.

(b) A l'aide de la question 3., encadrer $(u_n)^n$ puis déterminer $\lim_{n\to+\infty} u_n^n$.

(c) En déduire la limite de $(4-9u_n^2)$ et expliciter ℓ.

Exercice 18

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction f_n par :

$$f_n(x) = e^x + nx^2 - 3.$$

1. (a) Étudier les variations de f_n sur $[0,+\infty[$.
   (b) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet exactement une solution positive, notée u_n.
   (c) Vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \in]0,1[$.
2. (a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$.
   (b) En déduire le signe de $f_n(u_{n+1})$, puis le sens de variation de la suite (u_n).
   (c) Montrer que (u_n) est convergente. On note ℓ sa limite.
   (d) On suppose dans cette question que $\ell > 0$.
   Calculer la limite de $e^{u_n} + nu_n^2 - 3$ et en déduire une contradiction.
   (e) Donner enfin la valeur de ℓ.
   (f) Montrer que $\sqrt{\frac{n}{2}}u_n$ tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 19

On désigne par n un entier supérieur ou égal à 3. On note f_n la fonction définie par :

$$f_n(x) = x - n\ln(x).$$

1. (a) Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_{f_n}$ de f_n.
   (b) Déterminer les limites de f_n aux bornes de son ensemble de définition.
   (c) Justifier que f_n est continue et dérivable sur $\mathcal{D}_{f_n}$. Calculer f_n'.
   (d) Dresser le tableau de variation de f_n.
2. (a) Déterminer le signe de $f_n(n)$ (on pourra utiliser l'approximation $e = 2.72$).
   (b) En déduire que l'équation $f_n(x) = 0$ admet exactement deux solutions. En notant u_n la plus petite et v_n la plus grande de ces deux solutions, on vérifiera que :
   $$\forall n \geq 3,\ 0 \leq u_n \leq n \leq v_n.$$
3. Quelle est la nature de la suite $(v_n)_{n\geq 3}$?
4. (a) Calculer $f_n(1)$ et $f_n(e)$.
   (b) En déduire que : $\forall n \geq 3$, $1 \leq u_n \leq e$.
   (c) En utilisant l'égalité $f_n(u_n) = 0$, montrer que : $\forall n \geq 3$, $e^{1/n} \leq u_n \leq e^{e/n}$.
   (d) En déduire $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 20

On considère, pour tout entier $n \geq 1$, la fonction $h_n :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in]0,+\infty[,\quad h_n(x) = \frac{xe^{-x}}{x^n} - x^n$$

et la fonction $\varphi_n :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in]0,+\infty[,\quad \varphi_n(x) = e^{-x} - x^{2n-1}.$$

1. (a) Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$:
$$\forall x \in]0,+\infty[\,, \quad h_n(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; \varphi_n(x) = 0$$
   (b) En déduire que, pour tout entier $n \geq 1$, l'équation $h_n(x) = 0$, d'inconnue $x \in]0,+\infty[$, admet une solution et une seule, notée u_n.
   (c) Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$: $0 < u_n < 1$.
2. (a) Montrer, pour tout entier $n \geq 1$: $\ln(u_n) = -\dfrac{u_n}{2n-1}$.
   (b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(u_n)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 21

Partie I : Préliminaires

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $g(x) = \dfrac{e^{x+1}}{2x+1}$.

1. Étudier les variations de g sur $\mathbb{R}_+$ (on précisera la limite de g en $+\infty$).
2. En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\dfrac{e^{x+1}}{2x+1} > 1$ puis que $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\dfrac{1}{2x+1} > e^{-x-1}$.

   Donnée numérique : $e^{3/2} \simeq 4,48$.

Partie II : Étude d'une suite implicite

Pour tout entier naturel non nul n, on note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par la relation :
$$f_n(x) = \frac{x-n}{x+n} - e^{-x}.$$

3. Étudier les variations de la fonction f_n sur $\mathbb{R}_+$ (on précisera la limite de f_n en $+\infty$).
4. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution positive notée u_n.

   On définit ainsi implicitement une suite $(u_n)_{n\geq 1}$. On cherche dans les questions suivantes à étudier cette suite.
5. Monotonie de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$:
   (a) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f_{n+1}(x) - f_n(x) \leq 0$.
   (b) En déduire que $f_n(u_{n+1})$ est positif.
   (c) En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est croissante.
6. Comportement asymptotique de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$:
   (a) En étudiant le signe de $f_n(n)$, montrer que $u_n \geq n$.
   (b) En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$.
   (c) Déterminer le signe de $f_n(n+1)$ (on pourra utiliser la question 2).
   (d) En déduire un encadrement de u_n puis la limite de $\dfrac{u_n}{n}$.

Exercice 22

On considère la fonction $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

1. Étudier les variations de f puis tracer sa courbe représentative. On pourra remarquer que f est une fonction impaire.
2. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle à expliciter.
3. Montrer que, pour tout entier $n \geq 2$, l'équation $f(x) = \dfrac{1}{n}$ admet une et une seule solution dans $\mathbb{R}$. On note x_n cette solution.
4. Donner le tableau de variation de la bijection réciproque de f.
5. En déduire la monotonie de la suite (x_n) et déterminer sa limite.

Exercice 23

On considère la fonction $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2+1}$.

1. (a) Étudier les variations de f. On étudiera également sa parité.
   (b) Montrer que la droite Δ d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f en $+\infty$ et en $-\infty$. On précisera la position relative de $\mathcal{C}_f$ par rapport à Δ.
   (c) Tracer $\mathcal{C}_f$.
2. (a) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle à expliciter.
   (b) En déduire que pour tout entier naturel n, l'équation $\dfrac{x^3}{x^2+1} = n$ possède une unique solution, notée x_n, sur $\mathbb{R}$.
3. (a) Étudier la monotonie de la suite (x_n) et sa convergence.
   (b) Montrer que, pour tout entier naturel n, $n \leq x_n \leq n+1$.
   (c) En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{x_n}{n}$.

Exercice 24

On considère la fonction $f(x) = e^x - x$.

1. (a) Étudier les variations de f.
   (b) Déterminer les limites de f en $\pm\infty$.
   (c) Montrer que la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f admet la droite Δ d'équation $y = -x$ comme asymptote oblique en $-\infty$. Étudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ par rapport à Δ.
   (d) Tracer $\mathcal{C}_f$.
2. Montrer que pour tout $n \geq 2$, l'équation $f(x) = n$ possède exactement deux solutions de signes contraires.

   On notera α_n la solution positive de cette équation et β_n la solution négative.
3. (a) Étudier les variations de la suite $(\alpha_n)_{n\geq 2}$.
   (b) Démontrer que, pour tout entier $n \geq 2$, $\alpha_n \geq \ln(n)$.
   (c) En déduire le comportement asymptotique de la suite $(\alpha_n)_{n\geq 2}$.
4. (a) Étudier les variations de la suite $(\beta_n)_{n\geq 2}$.
   (b) Montrer que, pour tout entier $n \geq 2$, $-n \leq \beta_n \leq -n+1$.
   (c) En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \beta_n$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\beta_n}{n}$.

Exercice 25

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x\ln(x) - 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. (a) Montrer que f est continue sur $[0, +\infty[$ et dérivable sur $]0, +\infty[$.
   (b) Dresser le tableau de variation de f sur $[0, +\infty[$.
2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'équation $f(x) = n$ possède une seule solution positive, notée u_n.
   (b) Justifier que $u_n \geq 1$.
3. On note g la restriction de f à l'intervalle $[1, +\infty[$.
   (a) Justifier que g est une bijection de $[1, +\infty[$ dans un intervalle J à préciser.
   (b) Donner le tableau de variation de la bijection réciproque g^{-1} de g sur J.
   (c) Exprimer u_n à l'aide de g^{-1} et en déduire la monotonie de la suite (u_n) et sa limite lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 26

On désigne par n un entier supérieur ou égal à 1. On note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f_n(x) = \begin{cases} x\exp\left(-\dfrac{n}{x}\right) & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1. (a) Étudier la continuité de f_n sur $\mathbb{R}^+$.
   (b) Dresser le tableau de variation de f_n.
   (c) Montrer qu'il existe un unique $u_n \in \mathbb{R}_+$ tel que $f_n(u_n) = 1$. Justifier que $u_n > 1$.
   (d) Montrer que u_n est solution de l'équation $x\ln(x) = n$.
2. On note g la fonction $g(x) = x\ln(x)$.
   (a) Étudier les variations de g.
   (b) En déduire que g réalise une bijection de $\left[\dfrac{1}{e}, +\infty\right[$ sur un intervalle J à expliciter.
   (c) Étudier la monotonie de la suite (u_n) et sa convergence.
3. (a) Montrer que : $\forall n \geq 3,\ u_n \leq n$.
   (b) En déduire que : $\forall n \geq 3,\ u_n \geq \dfrac{n}{\ln(n)}$ puis que $u_n \leq \dfrac{n}{\ln(n) - \ln(\ln(n))}$.
   (c) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\ln(n) \times u_n}{n}$.