Correction du TP10

Suites réelles et récurrence

Exercice 1 1. Voici la procédure pour calculer u_n :

```
n=input('Donner une valeur de n: ')
u=0
for k=1:n do
    u=u^2+1
end
disp(u)
```

2. Notons $\mathcal{P}(n)$ la propriété "$u_n \geq n$" et montrons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   Initialisation : $u_0 = 0 \geq 0$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

   Hérédité : Soit n un entier naturel. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Par hypothèse de récurrence, $u_n \geq n$. La fonction carrée étant croissante sur $\mathbb{R}^+$, $u_n^2 \geq n^2$. Ainsi, $u_{n+1} = u_n^2 + 1 \geq n^2 + 1$. Or, pour tout entier naturel n, $n^2 \geq n$. Donc $u_{n+1} \geq n + 1$. Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

   Conclusion : Par le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq n$.

3. Comme $u_n \geq n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$, on a par passage à la limite $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

4. Voici la procédure pour déterminer le plus petit n tel que $u_n \geq 10^5$:

```
u=0
n=0
while u<10^5 do
    u=u^2+1
    n=n+1
end
disp(n)
```

   On obtient $n = 6$, donc la suite diverge très rapidement vers $+\infty$.

Exercice 2 1. Notons $\mathcal{P}(n)$ la propriété "a_n et b_n sont bien définies et strictement positifs" et montrons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   Initialisation : $a_0 = 1 > 0$ et $b_0 = 2 > 0$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

   Hérédité : Soit n un entier naturel. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Par hypothèse de récurrence, a_n et b_n sont bien définies et strictement positifs. Donc $a_n b_n > 0$ donc $a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$ est bien définie et est > 0. Et $b_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$ est bien définie et est > 0.

   Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

   Conclusion : Par le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, a_n et b_n sont bien définies et strictement positifs.

2. Voici la procédure pour calculer a_n et b_n :

```
n=input('Donner une valeur de n: ')
a=1
b=2
for k=1:n do
    x=a
    y=b
    a=sqrt(x*y)
    b=(x+y)/2
end
disp(b,a)
```

3. (a) Pour tout entier naturel n, on a :

$$b_{n+1}-a_{n+1}=\sqrt{a_nb_n}-\frac{a_n+b_n}{2}=\frac{a_n-2\sqrt{a_n}\sqrt{b_n}+b_n}{2}=\frac{(\sqrt{b_n}-\sqrt{a_n})^2}{2}.$$

Donc $\forall n\in\mathbb{N}$, $b_{n+1}-a_{n+1}\geq 0$. Ainsi, $\forall\ n\geq 1$, $b_n\geq a_n$. Et $a_0=1\leq 2=b_0$. Donc $\forall\ n\in\mathbb{N}$, $a_n\leq b_n$.

(b) Pour tout entier naturel n, on a :

$$a_{n+1}-a_n=\sqrt{a_nb_n}-a_n=\sqrt{a_n}\sqrt{b_n}-a_n=(\sqrt{b_n}-\sqrt{a_n})\sqrt{a_n}.$$

Or, d'après la question précédente, $\forall n\in\mathbb{N}$, $a_n\leq b_n$, donc par croissance de la fonction racine carrée, $\forall n\in\mathbb{N}$, $\sqrt{a_n}\leq\sqrt{b_n}$. Donc $\forall n\in\mathbb{N}$, $a_{n+1}-a_n=(\sqrt{b_n}-\sqrt{a_n})\sqrt{a_n}\geq 0$ et la suite (a_n) est croissante.

(c) Pour tout entier naturel n, on a :

$$b_{n+1}-b_n=\frac{a_n+b_n}{2}-b_n=\frac{a_n-b_n}{2}.$$

D'après la question 3.(a), $a_n\leq b_n$ donc $b_{n+1}-b_n\leq 0$. La suite (b_n) est donc décroissante.

4. (a) On a vu à la question 3.(a) que $\forall n\in\mathbb{N}$, $a_n\leq b_n$. De plus, on a démontré à la question 3.(c) que (b_n) est décroissante donc (b_n) est majorée par son premier terme $b_0=2$. Donc, pour tout entier naturel n, $a_n\leq b_n\leq b_0=2$. La suite (a_n) est bien majorée par 2.

D'après le théorème des suites monotones, comme (a_n) est croissante (question 3.(b)) et majorée par 2, elle converge vers une limite notée ℓ_1.

(b) On a vu à la question 3.(a) que $\forall n\in\mathbb{N}$, $a_n\leq b_n$. De plus, on a démontré à la question 3.(b) que (a_n) est croissante donc (a_n) est minorée par son premier terme $a_0=1$. Donc, pour tout entier naturel n, $b_n\geq a_n\geq a_0=1$. La suite (b_n) est bien minorée par 1.

D'après le théorème des suites monotones, comme (b_n) est décroissante (question 3.(c)) et minorée par 1, elle converge vers une limite notée ℓ_2.

(c) Par passage à la limite dans l'égalité $b_{n+1}=\dfrac{a_n+b_n}{2}$, on obtient :

$$\ell_2=\frac{\ell_1+\ell_2}{2}\Leftrightarrow\frac{\ell_2}{2}=\frac{\ell_1}{2}\Leftrightarrow\ell_1=\ell_2.$$

5. Voici la procédure pour obtenir une approximation de ℓ :

```
eps=input('Donner une valeur de epsilon : ')
a=1
b=2
while abs(b-a)>eps do
    x=a
    y=b
    a=sqrt(x*y)
    b=(x+y)/2
end
disp(b,a)
```

Exercice 3 1. Voici la procédure pour calculer u_n :

```
n=input('Donner une valeur de n: ')
u=1
for k=1:n do
    u=(2*u^2)/(1+5*u)
end
disp(u)
```

2. Notons $\mathcal{P}(n)$ la propriété "u_n est bien définie et $u_n\geq 0$" et montrons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Initialisation : $u_0=1\geq 0$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit n un entier naturel. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est aussi vérifiée.

Par hypothèse de récurrence, u_n est bien définie et $u_n \geq 0$. Donc $2u_n^2 \geq 0$ et $1+5u_n > 0$. Donc par passage au quotient (qui est bien définie car $1+5u_n > 0$), $u_{n+1} = \dfrac{2u_n^2}{1+5u_n} \geq 0$. Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion : Par le principe de récurrence, pour tout entier naturel n, u_n est bien définie et $u_n \geq 0$.

3. On étudie la monotonie de la suite (u_n) :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n^2}{1+5u_n} - u_n = \frac{2u_n^2 - u_n(1+5u_n)}{1+5u_n} = \frac{-u_n - 3u_n^2}{1+5u_n} \leq 0,$$

en utilisant la question précédente et le fait que, pour tout entier naturel n, $u_n \geq 0$.
Donc la suite (u_n) est décroissante.

4. La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0. Par le théorème des suites monotones, on en déduit que (u_n) est convergente vers une limite ℓ positive. Cherchons la valeur de ℓ. Pour cela, on passe à la limite dans la relation $u_{n+1} = \dfrac{2u_n^2}{1+5u_n}$ et on obtient :

$$\ell = \frac{2\ell^2}{1+5\ell} \Leftrightarrow \ell(1+5\ell) = 2\ell^2 \Leftrightarrow \ell + 3\ell^2 = 0 \Leftrightarrow \ell(1+3\ell) \Leftrightarrow \ell = 0 \text{ ou } \ell = \frac{-1}{3}.$$

Comme $\ell \geq 0$, la seule valeur possible de ℓ est $\ell = 0$. Donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

5. Pour tout entier naturel n, on a :

$$u_{n+1} - \frac{2u_n}{5} = \frac{2u_n^2}{1+5u_n} - \frac{2u_n}{5} = \frac{10u_n^2 - 2u_n(1+5u_n)}{5(1+5u_n)} = \frac{-2u_n}{5(1+5u_n)} \leq 0.$$

6. Notons $\mathcal{P}(n)$ la propriété "$u_n \leq \left(\dfrac{2}{5}\right)^n$" et montrons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation : $u_0 = 1 \leq \left(\dfrac{2}{5}\right)^0$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit n un entier naturel. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est aussi vérifiée.

En utilisant la question précédente puis l'hypothèse de récurrence, on a :

$$u_{n+1} \leq \frac{2}{5}u_n \leq \frac{2}{5} \times \left(\frac{2}{5}\right)^n = \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}.$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion : Par le principe de récurrence, pour tout entier naturel n, $u_n \leq \left(\dfrac{2}{5}\right)^n$.

7. On a l'inégalité $u_n \leq \left(\dfrac{2}{5}\right)^n$. On cherche à majorer $\left(\dfrac{2}{5}\right)^n$ par 10^{-9}. On a, en utilisant la croissance du logarithme à la première équivalence et que $\ln(2/5) < 0$ à la troisième équivalence :

$$\left(\frac{2}{5}\right)^n \leq 10^{-9} \Leftrightarrow \ln\left(\left(\frac{2}{5}\right)^n\right) \leq \ln(10^{-9}) \Leftrightarrow n\ln(2/5) \leq -9\ln(10) \Leftrightarrow n \geq \frac{-9\ln(10)}{\ln(2/5)} \simeq 22,62.$$

Donc, $N = 23$ et, pour tout $n \geq 23$, $u_n \leq 10^{-9}$.

8. Voici la procédure pour déterminer le plus petit n tel que $u_n \leq 10^{-9}$:

```
u=1
n=0
while u>10^(-9) do
    u=(2*u^2)/(1+5*u)
    n=n+1
end
disp(n)
```

On obtient $n = 6$, donc la suite converge très rapidement vers 0. En particulier, on remarque que le $N = 23$ obtenue à la question précédente n'est pas le plus petit entier n tel que $u_n \leq 10^{-9}$.