TP10

Suites réelles et récurrence

Exercice 1 On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n^2 + 1$.

1. Construire une procédure en langage Scilab qui, étant donné un entier $n \in \mathbb{N}$, calcule u_n.
2. Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_n \geq n$.
3. En déduire le comportement asymptotique de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. Construire une procédure en langage Scilab qui permet de déterminer le plus petit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \geq 10^5$.

Exercice 2 On considère les deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $a_0 = 1$, $b_0 = 2$, ainsi que par les relations :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \quad \text{et} \quad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}. \tag{1}$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, a_n et b_n sont bien définies et strictement positifs.
2. Construire une procédure en langage Scilab qui, étant donné un entier $n \in \mathbb{N}$, calcule a_n et b_n.
3. (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{b_n} - \sqrt{a_n}\right)^2$.
   En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \leq b_n$.
   (b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} - a_n = \left(\sqrt{b_n} - \sqrt{a_n}\right)\sqrt{a_n}$.
   En déduire que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
   (c) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_{n+1} - b_n = \frac{1}{2}(a_n - b_n)$.
   En déduire que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
4. (a) Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par 2.
   En déduire qu'elle converge vers une limite finie qu'on notera ℓ_1.
   (b) Montrer que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 1.
   En déduire qu'elle converge vers une limite finie qu'on notera ℓ_2.
   (c) En passant à la limite dans les relations (**??**), montrer que $\ell_1 = \ell_2$.

   On a ainsi démontré que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite ℓ et que :

   $$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \leq \ell \leq b_n.$$

5. Construire une procédure en langage Scilab qui, étant donné un $\varepsilon > 0$, calcule une approximation de ℓ à ε près.

Exercice 3 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{2u_n^2}{1 + 5u_n}$.

1. Construire une procédure en langage Scilab qui, étant donné un entier $n \in \mathbb{N}$, calcule u_n.
2. Montrer que pour tout entier naturel n, u_n est bien définie et $u_n \geq 0$.
3. En déduire la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ? Si oui, déterminer sa limite.
5. Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \leq \dfrac{2u_n}{5}$.
6. En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n \leq \left(\dfrac{2}{5}\right)^n$.
7. Déterminer un entier N vérifiant, pour tout $n \geq N$, $u_n \leq 10^{-9}$.
8. Construire une procédure en langage Scilab qui permet de déterminer le plus petit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \leq 10^{-9}$.
   Comparer avec le résultat obtenu à la question précédente.