TP11

Sommes doubles

1 Sommes doubles à indices indépendants

On considère des réels $x_{i,j}$ avec $i \in [\![1,n]\!]$ et $j \in [\![1,m]\!]$. On range ces valeurs dans un tableau :

$$\begin{array}{cccccc} x_{1,1} & x_{1,2} & \cdots & x_{1,j} & \cdots & x_{1,m} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & \cdots & x_{2,j} & \cdots & x_{2,m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_{i,1} & x_{i,2} & \cdots & x_{i,j} & \cdots & x_{i,m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_{n,1} & x_{n,2} & \cdots & x_{n,j} & \cdots & x_{n,m} \end{array}$$

On souhaite calculer la somme S de tous ces termes :

- **Sommation suivant les lignes** : On calcule la somme des termes de la première ligne, puis on ajoute les termes de la deuxième ligne, ... et enfin la somme des termes de la n-ième ligne :

$$S = \sum_{j=1}^{m} x_{1,j} + \sum_{j=1}^{m} x_{2,j} + \ldots + \sum_{j=1}^{m} x_{i,j} + \ldots + \sum_{j=1}^{m} x_{n,j} = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} x_{i,j} \right)$$

- **Sommation suivant les colonnes** : On calcule la somme des termes de la première colonne, puis on ajoute les termes de la deuxième colonne, ... et enfin la somme des termes de la m-ième colonne :

$$S = \sum_{i=1}^{n} x_{i,1} + \sum_{i=1}^{n} x_{i,2} + \ldots + \sum_{i=1}^{n} x_{i,j} + \ldots + \sum_{i=1}^{n} x_{i,m} = \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} x_{i,j} \right)$$

On obtient évidement la même somme avec ces deux méthodes d'où la formule d'interversion suivante :

Propriété 1 (Interversion de sommes à indices indépendants)

Considérons $n \times m$ réels $x_{i,j}$, avec $i \in [\![1,n]\!]$ et $j \in [\![1,m]\!]$. Alors la somme S de tous ces termes est :

$$S = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} x_{i,j} \right) = \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} x_{i,j} \right).$$

On notera S sous la forme plus concise $\displaystyle\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} x_{i,j}$ ou $\displaystyle\sum_{1 \leq i,j \leq n} x_{i,j}$ lorsque $n = m$.

Exemple. Avec $n = 3$, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i,j \leq 3} x_{i,j} &= \sum_{i=1}^{3} \left(\sum_{j=1}^{3} x_{i,j} \right) = x_{1,1} + x_{1,2} + x_{1,3} + x_{2,1} + x_{2,2} + x_{2,3} + x_{3,1} + x_{3,2} + x_{3,3} \\ &= \sum_{j=1}^{3} \left(\sum_{i=1}^{3} x_{i,j} \right) = x_{1,1} + x_{2,1} + x_{3,1} + x_{1,2} + x_{2,2} + x_{3,2} + x_{1,3} + x_{2,3} + x_{3,3}. \end{aligned}$$

Exercice 1

1. Écrire sans les symboles $\sum$ l'expression : $\displaystyle\sum_{\substack{1 \leq i \leq 2 \\ 1 \leq j \leq 4}} \frac{i}{j}$.

2. Écrire avec le symbole $\sum$ l'expression : $1 \times 1^2 + 2 \times 1^2 + 3 \times 1^2 + 1 \times 2^2 + 2 \times 2^2 + 3 \times 2^2$.

Exercice 2 On considère la procédure suivante :

```
n=input('Donner une valeur de n: ')
S=0
for i=1:n do
    for j=1:n do
        S=S+i*j^2
    end
end
disp(S)
```

1. Entrer dans l'éditeur de Scilab cette procédure. Tester pour différentes valeurs de n. A quoi correspond la valeur de S donnée en sortie ?
2. Calculer S "à la main" et vérifier le résultat grâce aux valeurs obtenues avec Scilab.

Exercice 3 On considère les sommes suivantes, où n est un entier ≥ 2 :

$$S_n = \sum_{1 \leq i,j \leq n} i, \qquad T_n = \sum_{1 \leq i,j \leq n} j2^i \qquad \text{et} \qquad U_n = \sum_{1 \leq i,j \leq n} ij$$

1. Construire une procédure qui, étant donné un entier $n \geq 2$, calcule S_n, T_n et U_n.
2. Calculer ces sommes "à la main" et vérifier avec les résultats obtenus avec Scilab.

2 Sommes doubles à indices dépendants

Considérons maintenant des réels $x_{i,j}$ avec $1 \leq i \leq j \leq n$ rangés dans le tableau carré suivant :

$$\begin{array}{cccccc}
x_{1,1} & x_{1,2} & \cdots & x_{1,j} & \cdots & x_{1,n} \\
 & x_{2,2} & \cdots & x_{2,j} & \cdots & x_{2,n} \\
 & & \ddots & \vdots & & \vdots \\
 & & & x_{j,j} & \cdots & x_{j,n} \\
 & & & & \ddots & \vdots \\
 & & & & & x_{n,n}
\end{array}$$

On souhaite calculer la somme S de tous ces termes :

- **Sommation suivant les lignes** : On calcule la somme des termes de la première ligne, puis on ajoute les termes de la deuxième ligne, ... et enfin la somme des termes de la n-ième ligne :

$$S = \sum_{j=1}^{n} x_{1,j} + \sum_{j=2}^{n} x_{2,j} + \ldots + \sum_{j=i}^{n} x_{i,j} + \ldots + \sum_{j=n}^{n} x_{n,j} = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=i}^{n} x_{i,j} \right)$$

- **Sommation suivant les colonnes** : On calcule la somme des termes de la première colonne, puis on ajoute les termes de la deuxième colonne, ... et enfin la somme des termes de la n-ième colonne :

$$S = \sum_{i=1}^{1} x_{i,1} + \sum_{i=1}^{2} x_{i,2} + \ldots + \sum_{i=1}^{j} x_{i,j} + \ldots + \sum_{i=1}^{n} x_{i,n} = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{j} x_{i,j} \right)$$

On obtient évidement la même somme avec ces deux méthodes d'où la formule d'interversion suivante :

Propriété 2 (Interversion de sommes à indices dépendants)

Considérons des réels $x_{i,j}$ avec $1 \leq i \leq j \leq n$. Alors la somme S de tous ces termes est :

$$S = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=i}^{n} x_{i,j} \right) = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{j} x_{i,j} \right)$$

On notera S sous la forme plus concise $\displaystyle\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} x_{i,j}$.

Exemple. Avec $n = 4$, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{1\leq i\leq j\leq 4} x_{i,j} &= \sum_{i=1}^{4}\left(\sum_{j=i}^{4} x_{i,j}\right) = x_{1,1}+x_{1,2}+x_{1,3}+x_{1,4}+x_{2,2}+x_{2,3}+x_{2,4}+x_{3,3}+x_{3,4}+x_{4,4}\\ &= \sum_{j=1}^{4}\left(\sum_{i=1}^{j} x_{i,j}\right) = x_{1,1}+x_{1,2}+x_{2,2}+x_{1,3}+x_{2,3}+x_{3,3}+x_{1,4}+x_{2,4}+x_{3,4}+x_{4,4}.\end{aligned}$$

Exercice 4
1. Écrire sans les symboles $\sum$ l'expression : $\displaystyle\sum_{1\leq i\leq j\leq 5} (j-i)$.
2. Écrire avec le symbole $\sum$ l'expression : $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{2}{2}+\frac{2}{3}+\frac{2}{4}+\frac{3}{3}+\frac{3}{4}+\frac{4}{4}$.

Méthode.

Pour intervertir les symboles $\sum$ dans la somme $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=i}^{n} x_{i,j}\right)$, on peut procéder ainsi :

- Le système d'indices qui décrit la somme est $1\leq i\leq n$ et $i\leq j\leq n$.
- On synthétise ces conditions : $1\leq i\leq j\leq n$.
- On les réorganise en "commençant" par j: $1\leq j\leq n$ et $1\leq i\leq j$.

On en déduit que la somme double s'écrit : $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j} x_{i,j}\right)$.

Si on ne somme pas les termes diagonaux du tableau précédent, on obtient la formule d'interversion suivante :

Propriété 3 (Interversion de sommes à indices dépendants)

Considérons des réels $x_{i,j}$ avec $1\leq i<j\leq n$. Alors la somme S de tous ces termes est :

$$S = \sum_{i=1}^{n-1}\left(\sum_{j=i+1}^{n} x_{i,j}\right) = \sum_{j=2}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j-1} x_{i,j}\right).$$

On notera S sous la forme plus concise $\displaystyle\sum_{1\leq i<j\leq n} x_{i,j}$.

Exemple. Avec $n = 4$, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{1\leq i<j\leq 4} x_{i,j} &= \sum_{i=1}^{3}\left(\sum_{j=i+1}^{4} x_{i,j}\right) = x_{1,2}+x_{1,3}+x_{1,4}+x_{2,3}+x_{2,4}+x_{3,4}\\ &= \sum_{j=2}^{4}\left(\sum_{i=1}^{j-1} x_{i,j}\right) = x_{1,2}+x_{1,3}+x_{2,3}+x_{1,4}+x_{2,4}+x_{3,4}.\end{aligned}$$

Exercice 5
1. Écrire sans les symboles $\sum$ l'expression : $\displaystyle\sum_{1\leq i<j\leq 5} (j-i)$.
2. Écrire avec le symbole $\sum$ l'expression : $\frac{2}{1}+\frac{3}{1}+\frac{4}{1}+\frac{5}{1}+\frac{3}{2}+\frac{4}{2}+\frac{5}{2}+\frac{4}{3}+\frac{5}{3}+\frac{5}{4}$.

Méthode.

Pour intervertir les symboles $\sum$ dans la somme $\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1}\left(\sum_{j=i+1}^{n} x_{i,j}\right)$, on peut procéder ainsi :

- Le système d'indices qui décrit la somme est $1 \leq i \leq n-1$ et $i+1 \leq j \leq n$.
- On synthétise ces conditions : $1 \leq i < j \leq n$.
- On les réorganise en "commençant" par j: $2 \leq j \leq n$ et $1 \leq i \leq j-1$.

On en déduit que la somme double s'écrit : $\displaystyle\sum_{j=2}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j-1} x_{i,j}\right)$.

Exercice 6 On considère la procédure suivante :

```
n=input('Donner une valeur de n: ')
S=0
for i=1:n do
    for j=i:n do
        S=S+i/j
    end
end
disp(S)
```

1. Entrer dans l'éditeur de Scilab cette procédure. Tester pour différentes valeurs de n. A quoi correspond la valeur de S donnée en sortie ?
2. Calculer S "à la main" et vérifier le résultat grâce aux valeurs obtenues avec Scilab.

Exercice 7 On considère les deux sommes suivantes, où n est un entier ≥ 2 :

$$S_n = \sum_{1\leq i\leq j\leq n} 1, \qquad \text{et} \qquad T_n = \sum_{1\leq i<j\leq n} i.$$

1. Construire une procédure qui, étant donné un entier $n \geq 2$, calcule S_n et T_n.
2. Calculer ces sommes "à la main" et vérifier avec les résultats obtenus avec Scilab.

Exercice 8 Calculer les sommes doubles suivantes :

$$(1)\ \sum_{1\leq i\leq j\leq n} \frac{1}{j} \qquad (2)\ \sum_{1\leq i\leq j\leq n} ij \qquad (3)\ \sum_{1\leq i<j\leq n} (i+j)$$

$$(4)\ \sum_{0\leq i,j\leq n} 2^{i+j} \qquad (5)\ \sum_{1\leq i,j\leq n} |i-j| \qquad (6)\ \sum_{1\leq i,j\leq n} \min(i,j)$$