Correction du TP14

Définition d'une fonction sur Scilab

Exercice 1 1. Voici la fonction `discriminant` :

```
function res=discriminant(a,b,c)
    res=b^2-4*a*c
endfunction
```

2. Voici la fonction `maximum` :

```
function res=maximum(a,b)
    if a>b then
        res=a
    else
        res=b
    end
endfunction
```

3. Voici la fonction `sommedouble` :

```
function res=sommedouble(n)
    res=0
    for i=1:n do
        for j=i:n do
            res=res+i*j
        end
    end
endfunction
```

Exercice 2 1. Voici la fonction `u` :

```
function res=u(n)
    res=1
    for k=1:n do
        res=res/(1+res^2)
    end
endfunction
```

On teste pour différentes valeurs de n :

```
-->u(10)
 ans  =
    0.2088246
-->u(20)
 ans  =
    0.1520497
-->u(100)
 ans  =
    0.0700081
-->u(1000)
 ans  =
    0.0223318
```

La suite (u_n) semble converger vers 0.

2. (a) Notons $\mathcal{P}(n)$ la propriété : "$u_n \geq 0$.
Montrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.
Initialisation : $u_0 = 1 \geq 0$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est aussi vérifiée.

Par hypothèse de récurrence, $u_n \geq 0$. De plus, $1+u_n^2 > 0$.
Donc $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n^2} \geq 0$ et $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
Conclusion : Par le principe de récurrence, on a donc démontré que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$.

(b) On a :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n}{1+u_n^2} - u_n = \frac{u_n - u_n(1+u_n^2)}{1+u_n^2} = \frac{-u_n^3}{1+u_n^2}.$$

D'après la question précédente, $u_n \geq 0$, donc $\dfrac{-u_n^3}{1+u_n^2} \leq 0$, donc $u_{n+1} - u_n \leq 0$. Ainsi, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

(c) On a démontré avec les deux questions précédentes que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive et décroissante. D'après le théorème des suites monotones, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite $\ell \geq 0$.
Pour déterminer ℓ, on passe à la limite dans la relation $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n^2}$. Lorsque $n \longrightarrow +\infty$, on obtient :

$$\ell = \frac{\ell}{1+\ell^2} \Leftrightarrow \ell - \frac{\ell}{1+\ell^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{\ell^3}{1+\ell^2} \Leftrightarrow \begin{cases} \ell^3 = 0 \\ 1+\ell^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \ell = 0.$$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

3. Voici la fonction `vitesse` :

```
function n=vitesse(eps)
    n=2
    while abs(u(n))>eps do
        n=n+1
    end
endfunction
```

On teste avec plusieurs valeurs de ε :

```
-->vitesse(10^-1)
 ans  =
    49.
-->vitesse(10^-2)
 ans  =
    4998.
```

La suite converge très lentement vers sa limite.

Exercice 3

1. Voici la fonction `de` :

```
function res=de()
    res=floor(rand()*6)+1
endfunction
```

2. Voici la fonction `doublesix` :

```
function res=doublesix()
    if de()+de()==12 then
        res=1
    else
        res=0
    end
endfunction
```

3. Voici la fonction `nombre` :

```
function res=nombre(n)
    res=0
    for k=1:n do
        res=res+doublesix()
    end
endfunction
```

4. Voici la fonction `rang` :

```
function res=rang()
    res=1
    while doublesix()<>1 do
        res=res+1
    end
endfunction
```

Exercice 4

1. Voici la fonction `Syracuse` :

```
function res=Syracuse(a,n)
    res=a
    for k=1:n do
        if floor(res/2)==res/2 then
            res=res/2
        else
            res=(3*res+1)/2
        end
    end
endfunction
```

2. En testant pour plusieurs valeurs de a, on remarque qu'on obtient toujours les mêmes valeurs à partir d'un certain rang : 1 ou 2 par alternance.

   On peut conjecturer que c'est le cas pour n'importe quelles valeurs.

3. Voici la fonction `tempsdevol` :

```
function res=tempsdevol(a)
    res=0
    while Syracuse(a,res)<>1 do
        res=res+1
    end
endfunction
```