Correction du TP15

Coefficients binomiaux

Exercice 1 1. \

2. Cette fonction permet de construire le triangle de Pascal pour obtenir les coefficients binomiaux.

   L'instruction `P(i,j)=P(i-1,j-1)+P(i-1,j)` correspond à la relation de Pascal $\binom{i}{j} = \binom{i-1}{j-1} + \binom{i-1}{j}$.

3. On teste la fonction pour $n = 15$ et on obtient :

```
-->exercice1(15)
 ans  =
        column  1 to 10

    1.    0.     0.     0.     0.      0.      0.      0.      0.      0.
    1.    1.     0.     0.     0.      0.      0.      0.      0.      0.
    1.    2.     1.     0.     0.      0.      0.      0.      0.      0.
    1.    3.     3.     1.     0.      0.      0.      0.      0.      0.
    1.    4.     6.     4.     1.      0.      0.      0.      0.      0.
    1.    5.     10.    10.    5.      1.      0.      0.      0.      0.
    1.    6.     15.    20.    15.     6.      1.      0.      0.      0.
    1.    7.     21.    35.    35.     21.     7.      1.      0.      0.
    1.    8.     28.    56.    70.     56.     28.     8.      1.      0.
    1.    9.     36.    84.    126.    126.    84.     36.     9.      1.
    1.    10.    45.    120.   210.    252.    210.    120.    45.     10.
    1.    11.    55.    165.   330.    462.    462.    330.    165.    55.
    1.    12.    66.    220.   495.    792.    924.    792.    495.    220.
    1.    13.    78.    286.   715.    1287.   1716.   1716.   1287.   715.
    1.    14.    91.    364.   1001.   2002.   3003.   3432.   3003.   2002.
    1.    15.    105.   455.   1365.   3003.   5005.   6435.   6435.   5005.
         column 11 to 16

    0.       0.       0.      0.      0.     0.
    0.       0.       0.      0.      0.     0.
    0.       0.       0.      0.      0.     0.
    0.       0.       0.      0.      0.     0.
    0.       0.       0.      0.      0.     0.
    0.       0.       0.      0.      0.     0.
    0.       0.       0.      0.      0.     0.
    0.       0.       0.      0.      0.     0.
    0.       0.       0.      0.      0.     0.
    0.       0.       0.      0.      0.     0.
    1.       0.       0.      0.      0.     0.
    11.      1.       0.      0.      0.     0.
    66.      12.      1.      0.      0.     0.
    286.     78.      13.     1.      0.     0.
    1001.    364.     91.     14.     1.     0.
    3003.    1365.    455.    105.    15.    1.
```

   On obtient alors :

$$\binom{3}{1} = 3, \qquad \binom{5}{4} = 5, \qquad \binom{8}{2} = 28, \qquad \binom{10}{7} = 120, \qquad \binom{15}{10} = 3003.$$

4.
   - Le terme en x^3 de $(2+x)^6$ est $\binom{6}{3}2^3x^{6-3} = 20 \times 8 \times x^3 = 160x^3$
   - Le terme en x^5 de $(3-x)^8$ est $\binom{8}{3}3^3(-x)^{8-3} = 56 \times 27 \times (-x^5) = -1512x^5$.
   - Le terme en x^2y^5 de $(2x-3y)^7$ est $\binom{7}{2}(2x)^2(-3y)^{7-2} = 21 \times 4x^2 \times (-243y^5) = -20412x^2y^5$.

5. Voici la fonction `cb(k,n)` :

```
function res=cb(k,n)
    P=exercice1(n+1)
    res=P(n+1,k+1)
endfunction
```

6. Dans l'éditeur, on entre les lignes de commandes suivantes :

- Pour la première somme :

```
n=input('Donner n ')
S=2^n
for k=0:n do
    S=S-cb(k,n)
end
disp(S)
```

- Pour la deuxième somme :

```
n=input('Donner n ')
S=0
for k=0:n do
    S=S+cb(k,n)*(-1)^k
end
disp(S)
```

On constate en testant pour différentes valeurs de n qu'on obtient toujours 0.

Exercice 2 1. Notons $\mathcal{P}(n)$ la propriété : $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. Montrons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

Initialisation : On sait que $\binom{0}{0} = 1$. D'autre part, $\frac{0!}{0!(0-0)!} = \frac{1}{1\times 1} = 1$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit n un entier naturel. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est aussi vérifiée.

Si $k=0$, on a :

$$\frac{(n+1)!}{0!((n+1)-0)!} = \frac{(n+1)!}{(n+1)!} = 1 = \binom{n+1}{0}.$$

Si $k=n+1$, on a :

$$\frac{(n+1)!}{(n+1)!((n+1)-(n+1))!} = \frac{(n+1)!}{(n+1)!0!} = \frac{(n+1)!}{(n+1)!} = 1 = \binom{n+1}{n+1}.$$

Si $k \in [\![1,n]\!]$, on peut appliquer la formule du triangle de Pascal :

$$\begin{aligned}
\binom{n+1}{k} &= \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \underset{\mathcal{P}(n)}{=} \frac{n!}{(k-1)!\times(n-(k-1))!} + \frac{n!}{k!\times(n-k)!} \\
&= \frac{n!}{(k-1)!\times(n+1-k)!} + \frac{n!}{k!\times(n-k)!} \\
&= \frac{k\times n! + (n+1-k)\times n!}{k!\times(n+1-k)!} = \frac{n!\times(k+n+1-k)}{k!\times(n-k)!} \\
&= \frac{(n+1)!}{k!\times(n+1-k)!} = \binom{n+1}{k}.
\end{aligned}$$

Donc, pour tout $k \in [\![0,n+1]\!]$, $\binom{n+1}{k} = \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!}$ et $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion : Par le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\forall k \in [\![0,n]\!],\ \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

2. (a) Si $k \in [\![0,n]\!]$, on a :

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)! \times (n-(n-k))!} \frac{n!}{(n-k)! \times k!} = \frac{n!}{k! \times (n-k)!} = \binom{n}{k}.$$

(b) Si $k \in [\![1,n]\!]$, on a :

$$\begin{aligned} k\binom{n}{k} &= \frac{k \times n!}{k! \times (n-k)!} = \frac{k \times n \times (n-1)!}{k \times (k-1)! \times ((n-1)-(k-1))!} \\ &= \frac{n \times (n-1)!}{(k-1)! \times ((n-1)-(k-1))!} = n\binom{n-1}{k-1}. \end{aligned}$$

(c) Si $k \in [\![0,n-1]\!]$, on a :

$$(n-k)\binom{n}{k} = \frac{(n-k) \times n!}{k!(n-k)!} = \frac{(n-k) \times n!}{k!(n-k-1)!(n-k)} = \frac{n!}{k!(n-1-k)!} = \frac{n \times (n-1)!}{k!(n-1-k)!} = n\binom{n-1}{k}.$$

(d) Si $k \in [\![2,n]\!]$, on a :

$$\begin{aligned} k(k-1)\binom{n}{k} &= \frac{k(k-1)n!}{k!(n-k)!} = \frac{k(k-1)n!}{k(k-1) \times (k-2)!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-2)!(n-k)!} \\ &= \frac{n!}{(k-2)!((n-2)-(k-2))!} = \frac{n(n-1) \times (n-2)!}{(k-2)!((n-2)-(k-2))!} \\ &= n(n-1)\binom{n-2}{k-2}. \end{aligned}$$

Exercice 3 Soit $p \in \mathbb{N}$. Notons $\mathcal{P}(n)$ la propriété : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{p+k}{k} = \binom{p+n+1}{n}$. Montrons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

<u>Initialisation</u> : $\displaystyle\sum_{k=0}^{0} \binom{p+k}{k} = \binom{p+0}{0} = \binom{p}{0} = 1$ et $\displaystyle\binom{p+0+1}{0} = \binom{p+1}{0} = 1$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

<u>Hérédité</u> : Soit n un entier naturel. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est aussi vérifiée.

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{p+k}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{p+k}{k} + \binom{p+n+1}{n+1} = \binom{p+n+1}{n} + \binom{p+n+1}{n+1},$$

en utilisant l'hypothèse de récurrence à la deuxième égalité. Or :

$$\begin{aligned} \binom{p+n+1}{n} + \binom{p+n+1}{n+1} &= \frac{(p+n+1)!}{n!((p+n+1)-n)!} + \frac{(p+n+1)!}{(n+1)!((p+n+1)-(n+1))!} \\ &= \frac{(p+n+1)!}{n!(p+1)!} + \frac{(p+n+1)!}{(n+1)!p!} \\ &= \frac{(n+1) \times (p+n+1)!}{(n+1)!(p+1)!} + \frac{(p+1) \times (p+n+1)!}{(n+1)!(p+1)!} \\ &= \frac{(n+1) \times (p+n+1)! + (p+1) \times (p+n+1)!}{(n+1)!(p+1)!} \\ &= \frac{(p+n+1)! \times ((n+1)+(p+1))}{(n+1)!(p+1)!} \\ &= \frac{(p+n+2)!}{(n+1)!(p+1)!} = \frac{(p+n+2)!}{(n+1)!((p+n+2)-(n+1))!} = \binom{p+n+2}{n+1}. \end{aligned}$$

On a ainsi démontré que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} \binom{p+k}{k} = \binom{p+n+2}{n+1}$. Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

<u>Conclusion</u> : Par le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{p+k}{k} = \binom{p+n+1}{n}.$$

Cette formule a été démontrée pour un entier naturel p quelconque fixé. Elle est donc vraie pour tout entier naturel p. Ainsi,

$$\forall p \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} \binom{p+k}{k} = \binom{p+n+1}{n}.$$