TP15

Coefficients binomiaux

Exercice 1 1. Définir la fonction suivante dans l'éditeur :

```
function P=exercice1(n)
    P(1,1)=1
    for i=2:n do
        P(i,1)=1
        for j=2:i-1 do
            P(i,j)=P(i-1,j-1)+P(i-1,j)
        end
        P(i,i)=1
    end
endfunction
```

Exécuter et tester pour différentes valeurs de n.

2. Que fait cette fonction ? A quoi correspond l'instruction `P(i,j)=P(i-1,j-1)+P(i-1,j)` ?

3. A l'aide de cette fonction, obtenir la valeur des coefficients binomiaux suivants :

$$\binom{3}{1}, \qquad \binom{5}{4}, \qquad \binom{8}{2}, \qquad \binom{10}{7}, \qquad \binom{15}{10}.$$

4. A l'aide de cette fonction et de la formule binôme de Newton, déterminer :
   - Le coefficient en x^3 de $(2+x)^6$.
   - Le coefficient en x^5 de $(3-x)^8$.
   - Le coefficient en x^2y^5 de $(2x-3y)^7$.

5. A l'aide de la fonction `exercice1`, construire une fonction `cb(k,n)` qui retourne $\binom{n}{k}$.

6. Vérifier les égalités suivantes avec `Scilab` en testant pour quelques valeurs de n :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0.$$

Exercice 2 On rappelle les propriétés suivantes sur les coefficients binomiaux :

- $\forall n \in \mathbb{N}$, $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$.
- $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, $\forall k \in [\![1, n-1]\!]$, $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ (formule du triangle de Pascal).

1. A l'aide d'un raisonnement par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, démontrer que :

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \ \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

2. En déduire les égalités suivantes :

   (a) $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

   (b) $\forall k \in [\![1, n]\!]$ $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$.

   (c) $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $(n-k)\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k}$.

   (d) $\forall k \in [\![2, n]\!]$, $k(k-1)\binom{n}{k} = n(n-1)\binom{n-2}{k-2}$.

Exercice 3 Démontrer par récurrence sur l'entier n la formule suivante :

$$\forall p \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} \binom{p+k}{k} = \binom{p+n+1}{n}.$$