Correction du TP16

# Formule du binôme de Newton

**Exercice 1** Notons $\mathcal{P}(n)$ la propriété : "$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

Montrons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation : $(a+b)^0 = 1$ et $\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} a^k b^{0-k} = \binom{0}{0} a^0 b^0 = 1$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est aussi vérifiée.

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b) \times (a+b)^n \underset{\mathcal{P}(n)}{=} (a+b) \times \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} - \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{(n+1)-(k+1)} - \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k}.
\end{aligned}$$

En effectuant le changement de variable $i = k+1$ dans la première somme, on obtient :

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} \binom{n}{i-1} a^i b^{(n+1)-i} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k}.$$

On sort le terme $i = n+1$ dans la première somme et $k = 0$ dans la deuxième :

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i-1} a^i b^{n+1-i} + \binom{n}{n} a^{n+1} b^0 + \binom{n}{0} a^0 b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i-1} a^i b^{n+1-i} + a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \\
&= a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left( \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) a^k b^{n+1-k}.
\end{aligned}$$

Avec la formule du triangle de Pascal, on obtient finalement :

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} \\
&= \binom{n+1}{n+1} a^{n+1} b^{(n+1)-(n+1)} + \binom{n+1}{0} a^0 b^{(n+1)-0} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}.
\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion : Par le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

---

**Exercice 2** 1.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-1}{k+1} \frac{3^{2k-1}}{2^{k+1}} &= \sum_{l=1}^{n-1} \binom{n-1}{l} \frac{3^{2(l-1)-1}}{2^l} = \sum_{l=1}^{n-1} \binom{n-1}{l} \frac{3^{2l-3}}{2^l} = 3^{-3} \sum_{l=1}^{n-1} \binom{n-1}{l} \frac{9^l}{2^l} \\
&= \frac{1}{27} \left( \sum_{l=0}^{n-1} \binom{n-1}{l} \left(\frac{9}{2}\right)^l - 1 \right) = \frac{1}{27} \left( \sum_{l=0}^{n-1} \binom{n-1}{l} \left(\frac{9}{2}\right)^l 1^{n-1-l} - 1 \right) \\
&= \frac{1}{27} \left( \left(\frac{9}{2} + 1\right)^{n-1} - 1 \right) = \frac{1}{27} \left( \left(\frac{11}{2}\right)^{n-1} - 1 \right).
\end{aligned}$$

(On a effectué le changement d'indice $l = k+1$ à la première égalité).

2.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \frac{2^{k+1}}{k+1}\binom{n}{k} &= \sum_{k=0}^{n} \frac{2^{k+1}}{k+1}\frac{n!}{k!(n-k)!} = \sum_{k=0}^{n} 2^{k+1}\frac{n!}{(k+1)!(n-k)!} \\
&= \sum_{k=0}^{n} 2^{k+1}\frac{n!}{(k+1)!((n+1)-(k+1))!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{2^{k+1}}{n+1}\frac{(n+1)!}{(k+1)!((n+1)-(k+1))!} \\
&= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} 2^{k+1}\binom{n+1}{k+1} = \frac{1}{n+1}\sum_{l=1}^{n+1} 2^{l}\binom{n+1}{l} \\
&= \frac{1}{n+1}\left(\sum_{l=0}^{n+1}\binom{n+1}{l}2^{l}1^{n+1-l} - 1\right) = \frac{1}{n+1}(3^{n+1}-1).
\end{aligned}$$

(On a effectué le changement d'indice $l = k+1$ à la sixième égalité).

3.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}(n-k)\binom{n}{k} &= \sum_{k=0}^{n-1}(n-k)\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n-1}(n-k)\frac{n!}{k!(n-k)!} = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{n!}{k!(n-k-1)!} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{n\times(n-1)!}{k!((n-1)-k)!} = \sum_{k=0}^{n-1} n\binom{n-1}{k} = n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}1^{k}1^{n-1-k} = n2^{n-1}.
\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}\frac{n-k}{k+1}\binom{n}{k} &= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{n-k}{k+1}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{n-k}{k+1}\frac{n!}{k!(n-k)!} = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} = \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k+1} \\
&= \sum_{l=1}^{n}\binom{n}{l} = \sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}1^{l}1^{n-l} - 1 = 2^{n}-1.
\end{aligned}$$

(On a encore effectué le changement d'indice $l = k+1$ à la cinquième égalité).

---

**Exercice 3** 1. En appliquant la formule du binôme de Newton à la troisième égalité, on obtient :

$$\sum_{0\le i\le j\le n}\binom{j}{i} = \sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{i=0}^{n}\binom{j}{i}\right) = \sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{i=0}^{n}\binom{j}{i}1^{i}1^{j-i}\right) = \sum_{j=0}^{n}2^{j} = 2^{0}\times\frac{1-2^{n-0+1}}{1-2} = 2^{n+1}-1.$$

2. En appliquant la formule du binôme de Newton à la quatrième et à la cinquième égalité, on obtient :

$$\begin{aligned}
\sum_{0\le p\le k\le n} 3^{n-k}\binom{n}{k}\binom{k}{p} &= \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{p=0}^{k}3^{n-k}\binom{n}{k}\binom{k}{p}\right) = \sum_{k=0}^{n}3^{n-k}\binom{n}{k}\left(\sum_{p=0}^{k}\binom{k}{p}1^{p}1^{k-p}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}3^{n-k}2^{k} = 5^{n}.
\end{aligned}$$

---

**Exercice 4** 1. $f(x) = (1+x)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{k}1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{k}$.

2. On a alors :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= n(1+x)^{n-1} = \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{k}\right)' = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}kx^{k-1} = \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}kx^{k-1} \\
f''(x) &= n(n-1)(1+x)^{n-2} = \left(\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}kx^{k-1}\right)' = \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}k(k-1)x^{k-2} = \sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}k(k-1)x^{k-2}.
\end{aligned}$$

3. En posant $x = 1$ dans les formules de $f(x), f'(x)$ et $f''(x)$, on obtient :

$$\begin{aligned}
f(1) &= (1+1)^n = 2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}, \\
f'(1) &= n(1+1)^{n-1} = n2^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k 1^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k, \\
f''(1) &= n(n-1)(1+1)^{n-2} = n(n-1)2^{n-2} = \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} k(k-1)1^{k-2} = \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} k(k-1).
\end{aligned}$$

Donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$ et $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} = n(n-1)2^{n-2}$.

4. On a, avec la question précédente,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} &= \sum_{k=0}^{n} k((k-1)+1)\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} + \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} + \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} \\
&= n2^{n-1} + n(n-1)2^{n-2} = 2^{n-2}(2n + n(n-1)) = 2^{n-2}(n^2+n) = n(n+1)2^{n-2}.
\end{aligned}$$