TP16

Formule du binôme de Newton

Exercice 1 Soient $a, b \in \mathbb{R}$. A l'aide d'un raisonnement par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, démontrer la formule du binôme de Newton :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Exercice 2 Calculer les sommes suivantes :

$$(1)\ \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-1}{k+1} \frac{3^{2k-1}}{2^{k+1}} \qquad (2)\ \sum_{k=0}^{n} \frac{2^{k+1}}{k+1} \binom{n}{k} \qquad (3)\ \sum_{k=0}^{n} (n-k) \binom{n}{k} \qquad (4)\ \sum_{k=0}^{n} \frac{n-k}{k+1} \binom{n}{k}$$

Exercice 3 Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer les sommes doubles suivantes :

$$(1)\ \sum_{0 \leq i \leq j \leq n} \binom{j}{i} \qquad (2)\ \sum_{0 \leq p \leq k \leq n} 3^{n-k} \binom{n}{k} \binom{k}{p}$$

Exercice 4 Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1. Écrire la formule du binôme pour $f(x) = (1+x)^n$.
2. Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.
3. En déduire les sommes suivantes :
   (a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$
   (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k}$
   (c) $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} k(k-1) \binom{n}{k}$
4. Calculer la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k}$.