Correction du TP18

Calcul matriciel

Exercice 1 1. On définit les matrices sur Scilab :

```
-->A=ones(3,3); B=[0 -1 1;1 0 -1;-1 1 0];
```

2. On calcule $A * B$ et $B * A$ avec Scilab :

```
-->A*B, B*A
 ans  =
    0.    0.    0.
    0.    0.    0.
    0.    0.    0.
 ans  =
    0.    0.    0.
    0.    0.    0.
    0.    0.    0.
```

3. Comme $AB = BA = 0$, les matrices A et B commutent et on peut appliquer la formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned} M^n &= (A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k} = A^0 B^n + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} A^k B^{n-k} + A^n B^0 \\ &= B^n + AB \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} A^{k-1} B^{n-k-1} + A^n = B^n + 0 \times \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} A^{k-1} B^{n-k-1} + A^n \\ &= A^n + B^n. \end{aligned}$$

On aurait aussi pu faire une démonstration par récurrence.

4. On calcule A^2, A^3 et A^4 avec Scilab :

```
-->A^2, A^3, A^4
 ans  =
    3.    3.    3.
    3.    3.    3.
    3.    3.    3.
 ans  =
    9.    9.    9.
    9.    9.    9.
    9.    9.    9.
 ans  =
    27.    27.    27.
    27.    27.    27.
    27.    27.    27.
```

Notons $\mathcal{P}(k)$ la propriété $A^k = 3^{k-1}A$ et montrons que $\mathcal{P}(k)$ est vraie pour tout entier $k \geq 1$.

<u>Initialisation</u> : $A^1 = A$ et $3^{1-1}A = 3^0 A = A$ donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

<u>Hérédité</u> : Soit un entier $k \geq 1$. Supposons que $\mathcal{P}(k)$ est vraie. Montrons que $\mathcal{P}(k+1)$ est aussi vérifiée.

$$A^{k+1} = A^k \times A = 3^{k-1}A \times A = 3^{k-1} \times 3A = 3^k A,$$

en utilisant l'hypothèse de récurrence à la deuxième égalité. Donc $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

<u>Conclusion</u> : Par le principe de récurrence, on a : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $A^k = 3^{k-1}A$.

5. On calcule B^2, B^3, B^4, B^5 et B^6 avec Scilab :

```
-->B^2, B^3, B^4, B^5, B^6
 ans  =
  - 2.    1.    1.
    1.  - 2.    1.
    1.    1.  - 2.
 ans  =
    0.    3.  - 3.
  - 3.    0.    3.
    3.  - 3.    0.
 ans  =
    6.  - 3.  - 3.
  - 3.    6.  - 3.
  - 3.  - 3.    6.
 ans  =
    0.  - 9.    9.
    9.    0.  - 9.
  - 9.    9.    0.
 ans  =
  - 18.    9.     9.
    9.   - 18.    9.
    9.     9.   - 18.
```

Notons $\mathcal{P}(k)$ la propriété :

$$B^{2k} = \begin{pmatrix} -2\times(-3)^{k-1} & (-3)^{k-1} & (-3)^{k-1} \\ (-3)^{k-1} & -2\times(-3)^{k-1} & (-3)^{k-1} \\ (-3)^{k-1} & (-3)^{k-1} & -2\times(-3)^{k-1} \end{pmatrix} \text{ et } B^{2k+1} = \begin{pmatrix} 0 & -(-3)^k & (-3)^k \\ (-3)^k & 0 & -(-3)^k \\ -(-3)^k & (-3)^k & 0 \end{pmatrix}.$$

Montrons que $\mathcal{P}(k)$ est vraie pour tout $k \geq 1$.

<u>Initialisation</u> : $B^2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\times(-3)^{1-1} & (-3)^{1-1} & (-3)^{1-1} \\ (-3)^{1-1} & -2\times(-3)^{1-1} & (-3)^{1-1} \\ (-3)^{1-1} & (-3)^{1-1} & -2\times(-3)^{1-1} \end{pmatrix}$.

$B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 \\ -3 & 0 & 3 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -(-3)^1 & (-3)^1 \\ (-3)^1 & 0 & -(-3)^1 \\ -(-3)^1 & (-3)^1 & 0 \end{pmatrix}$.

Donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

<u>Hérédité</u> : Soit un entier $k \geq 1$. Supposons que $\mathcal{P}(k)$ est vraie. Montrons que $\mathcal{P}(k+1)$ est aussi vérifiée.

En utilisant l'hypothèse de récurrence à la deuxième égalité :

$$\begin{aligned} B^{2k+2} &= B \times B^{2k+1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & -(-3)^k & (-3)^k \\ (-3)^k & 0 & -(-3)^k \\ -(-3)^k & (-3)^k & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2\times(-3)^k & (-3)^k & (-3)^k \\ (-3)^k & -2\times(-3)^k & (-3)^k \\ (-3)^k & (-3)^k & -2\times(-3)^k \end{pmatrix}, \\ B^{2k+3} &= B \times B^{2k+2} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2\times(-3)^k & (-3)^k & (-3)^k \\ (-3)^k & -2\times(-3)^k & (-3)^k \\ (-3)^k & (-3)^k & -2\times(-3)^k \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -(-3)^{k+1} & (-3)^{k+1} \\ (-3)^{k+1} & 0 & -(-3)^{k+1} \\ -(-3)^{k+1} & (-3)^{k+1} & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

<u>Conclusion</u> : Par le principe de récurrence, on a : $\forall k \in \mathbb{N}^*$,

$$B^{2k} = \begin{pmatrix} -2\times(-3)^{k-1} & (-3)^{k-1} & (-3)^{k-1} \\ (-3)^{k-1} & -2\times(-3)^{k-1} & (-3)^{k-1} \\ (-3)^{k-1} & (-3)^{k-1} & -2\times(-3)^{k-1} \end{pmatrix} \text{ et } B^{2k+1} = \begin{pmatrix} 0 & -(-3)^k & (-3)^k \\ (-3)^k & 0 & -(-3)^k \\ -(-3)^k & (-3)^k & 0 \end{pmatrix}.$$

6. On a donc, pour tout entier $k \geq 1$:

$$\begin{aligned} M^{2k} &= \begin{pmatrix} 3^{2k-1} - 2\times(-3)^{k-1} & 3^{2k-1} + (-3)^{k-1} & 3^{2k-1} + (-3)^{k-1} \\ 3^{2k-1} + (-3)^{k-1} & 3^{2k-1} - 2\times(-3)^{k-1} & 3^{2k-1} + (-3)^{k-1} \\ 3^{2k-1} + (-3)^{k-1} & 3^{2k-1} + (-3)^{k-1} & 3^{2k-1} - 2\times(-3)^{k-1} \end{pmatrix}, \\ M^{2k+1} &= \begin{pmatrix} 3^{2k} & 3^{2k} - (-3)^k & 3^{2k} + (-3)^k \\ 3^{2k} + (-3)^k & 3^{2k} & 3^{2k} - (-3)^k \\ 3^{2k} - (-3)^k & 3^{2k} + (-3)^k & 3^{2k} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Exercice 2 1. On définit la matrice A sur Scilab et on calcule $B = A - 3I$:

```
-->A=[5 1 0;-3 2 1;1 0 2]; B=A-3*eye(3,3)
 B  =
    2.    1.    0.
  - 3.  - 1.    1.
    1.    0.  - 1.
```

2. On calcule B^2 et B^3 avec Scilab :

```
-->B^2, B^3
 ans  =
    1.    1.    1.
  - 2.  - 2.  - 2.
    1.    1.    1.
 ans  =
    0.    0.    0.
    0.    0.    0.
    0.    0.    0.
```

Donc, pour tout $k \geq 3$, $B^k = 0$.

3. Comme B et $3I$ commutent, on peut appliquer la formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned} A^n &= (3I+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (3I)^{n-k} B^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^{n-k} B^k \\ &= \binom{n}{0} 3^n B^0 + \binom{n}{1} 3^{n-1} B^1 + \binom{n}{2} 3^{n-2} B^2 + \sum_{k=3}^{n} \binom{n}{k} 3^{n-k} B^k \\ &= 3^n I + n3^{n-1} B + \frac{n(n-1)}{2} 3^{n-2} B^2. \end{aligned}$$

Exercice 3 1. Voici la procédure pour calculer a_n, b_n et c_n :

```
n=input("Donner n : ")
a=1
b=2
c=3
for k=1:n do
    x=a
    y=b
    z=c
    a=5*x-5*y+2*z
    b=-x+7*y-4*z
    c=2*x-5*y+5*z
end
disp(c,b,a)
```

2. (a) Avec les relations de récurrence des trois suites, on a :

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5a_n - 5b_n + 2c_n \\ -a_n + 7b_n - 4c_n \\ 2a_n - 5b_n + 5c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -5 & 2 \\ -1 & 7 & -4 \\ 2 & -5 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = AX_n,$$

en posant $A = \begin{pmatrix} 5 & -5 & 2 \\ -1 & 7 & -4 \\ 2 & -5 & 5 \end{pmatrix}$.

(b) Notons $\mathcal{P}(n)$ la propriété "$X_n = A^n X_0$". Montrons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.
Initialisation : $A^0 X_0 = I \times X_0 = X_0$. Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
Hérédité : Soit un entier naturel n. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est aussi vérifiée.

$$X_{n+1} = AX_n = AA^n X_0 = A^{n+1} X_0,$$

en utilisant la question précédente à la première égalité et l'hypothèse de récurrence à la deuxième égalité.
Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
Conclusion : Par le principe de récurrence, pour tout entier naturel n, $X_n = A^n X_0$.

3. (a) A l'aide de la méthode du pivot de Gauss (les calculs sont laissés au lecteur), on obtient que P est inversible et que $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 1 \\ 4/3 & 0 & -4/3 \\ 1/6 & -1/2 & 1/3 \end{pmatrix}$. On obtient le même résultat sur Scilab :

```
-->P=[1 1 1;1 1/2 -1;1 1/4 1]
 P  =
    1.    1.       1.
    1.    0.5    - 1.
    1.    0.25     1.
-->inv(P)
 ans  =
  - 0.5          0.5    1.
    1.3333333    0.   - 1.3333333
    0.1666667  - 0.5    0.3333333
```

(b) Toujours avec Scilab :

```
-->A=[5 -5 2;-1 7 -4;2 -5 5]
 A  =
    5.  - 5.    2.
  - 1.    7.  - 4.
    2.  - 5.    5.
-->inv(P)*A*P
 ans  =
    2.    0.    0.
    0.    3.    0.
    0.    0.    12.
```

Donc $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$.

4. (a) Notons $\mathcal{P}(n)$ la propriété "$D^n = P^{-1} A^n P$". Montrons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Initialisation : $D^0 = I$ et $P^{-1} A^0 P = P^{-1} I P = P^{-1} P = I$. Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
Hérédité : Soit un entier naturel n. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est aussi vérifiée.

$$D^{n+1} = D^n \times D = P^{-1} A^n P \times P^{-1} A P = P^{-1} A^n \underbrace{P P^{-1}}_{=I} A P = P^{-1} A^n A P = P^{-1} A^{n+1} P,$$

en utilisant l'hypothèse de récurrence et la question 3.(b) à la deuxième égalité.
Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
Conclusion : Par le principe de récurrence, pour tout entier naturel n, $D^n = P^{-1} A^n P$.

(b) D'après la question précédente, $D^n = P^{-1} A^n P$. En multipliant par P à gauche et par P^{-1} à droite, on obtient $P D^n P^{-1} = \underbrace{P P^{-1}}_{=I} A^n \underbrace{P P^{-1}}_{=I} = A^n$. Donc $A^n = P D^n P^{-1}$.

Comme D est diagonale, on a : $D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 12^n \end{pmatrix}$.

Après calculs, on obtient que la deuxième colonne de A^n vaut $\begin{pmatrix} \frac{2^n - 12^n}{2} \\ \frac{2^n + 12^n}{2} \\ \frac{2^n - 12^n}{2} \end{pmatrix}$.

(c) Avec la question 2.(b), on a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$X_n = A^n X_0 = \begin{pmatrix} * & \frac{2^n - 12^n}{2} & * \\ * & \frac{2^n + 12^n}{2} & * \\ * & \frac{2^n - 12^n}{2} & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n - 12^n \\ 2^n + 12^n \\ 2^n - 12^n \end{pmatrix}.$$

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = 2^n - 12^n$, $b_n = 2^n + 12^n$, $c_n = 2^n - 12^n$.

Exercice 4 1. Voici la fonction `Transposee` pour calculer la transposée d'une matrice :

```
function B=Transposee(A)
    [n,p]=size(A)
    B=zeros(p,n)
    for i=1:n do
        for j=1:p do
            B(j,i)=A(i,j)
        end
    end
endfunction
```

Par exemple :

```
-->A=[1 2 3;4 5 6]
 A  =
    1.    2.    3.
    4.    5.    6.
-->Transposee(A)
 ans  =
    1.    4.
    2.    5.
    3.    6.
```

2. Voici la fonction `Diagonale` pour construire une matrice diagonale :

```
function A=Diagonale(L)
    n=length(L)
    A=zeros(n,n)
    for i=1:n do
        A(i,i)=L(i)
    end
endfunction
```

Alors, par exemple :

```
-->Diagonale([1 2 3])
 ans  =
    1.    0.    0.
    0.    2.    0.
    0.    0.    3.
```

3. La procédure suivante permet de calculer le produit de deux matrices :

```
function C=ProduitMatriciel(A,B)
    [n,p]=size(A)
    [q,r]=size(B)
    if p==q then
        C=zeros(n,r)
        for l=1:n do
            for c=1:r do
                for k=1:p do
                    C(l,c)=C(l,c)+A(l,k)*B(k,c)
                end
            end
        end
    else
        error('tailles des matrices incompatibles')
    end
endfunction
```

Par exemple :

```
-->ProduitMatriciel([1 2 3;4 5 6;7 8 9],diag([1 2 3]))
 ans  =
    1.    4.     9.
    4.    10.    18.
    7.    16.    27.
```