TP18

Calcul matriciel

Exercice 1 On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Définir les matrices A et B sur Scilab.
2. Calculer avec Scilab AB et BA.
3. Soit $M = A + B$. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, $M^n = A^n + B^n$.
4. Calculer A^2, A^3, A^4 avec Scilab. Conjecturer l'expression de A^n puis démontrer votre conjecture.
5. Calculer B^2, B^3, B^4, B^5, B^6 avec Scilab. Conjecturer l'expression de B^n puis démontrer votre conjecture.
6. Déduire des questions précédentes une expression de M^n en fonction de n.

Exercice 2 On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Définir la matrice A avec Scilab, puis déterminer la matrice $B = A - 3I$.
2. Calculer B^2 et B^3 avec Scilab. En déduire B^k pour tout entier $k \geq 3$.
3. Déduire des questions précédentes une expression de A^n en fonction de l'entier naturel n.

Exercice 3 On considère trois suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ b_0 = 2 \\ c_0 = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} a_{n+1} = 5a_n - 5b_n + 2c_n \\ b_{n+1} = -a_n + 7b_n - 4c_n \\ c_{n+1} = 2a_n - 5b_n + 5c_n \end{cases}$$

1. Construire une procédure qui, étant donné un entier naturel n, calcule et affiche a_n, b_n et c_n.
2. On pose $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.
   (a) Déterminer une matrice A telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$.
   (b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$.
3. On considère la matrice :
$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & -1 \\ 1 & \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix}$$
   (a) Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}. Vérifier vos calculs avec Scilab.
   (b) On pose $D = P^{-1}AP$. Calculer D avec Scilab.
4. (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $D^n = P^{-1}A^nP$.
   (b) En déduire les coefficients de la deuxième colonne de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (c) Donner l'expression de a_n, b_n et c_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 4

1. Écrire une fonction `Transposee` qui, étant donnée une matrice A, permet d'obtenir la transposée de A.

   On n'utilisera pas ici la commande `A'`.

2. Écrire une fonction `Diagonale` qui, étant donné un vecteur ligne $[a_1, \ldots, a_n]$, permet d'obtenir la matrice diagonale suivante :

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix}$$

   Remarquons que l'instruction `diag([`a_1`,...,`a_n`])` permet aussi de construire une matrice diagonale (on pourra consulter l'aide pour plus de détails). On n'utilisera pas cette fonction pour la procédure ci-dessus.

3. Écrire une fonction `ProduitMatriciel` qui, étant données deux matrices A et B, vérifie si le produit matriciel de A par B est bien défini et

   - si ce n'est pas le cas, elle affiche un message d'erreur,
   - si c'est le cas, elle calcule et affiche le produit matriciel de A par B en utilisant la définition vue en cours : si $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_{p,r}(\mathbb{R})$, alors le produit matriciel de A par B est la matrice $C = (c_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,r}(\mathbb{R})$ définie par $c_{i,j} = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j}$.

   On n'utilisera pas ici la commande `A*B`.