TP19

Simulations d'expériences aléatoires

L'instruction `rand()` renvoie un nombre choisi au hasard dans l'intervalle $]0,1[$.

```
-->rand()
 ans  =
    0.7560438541695
```

Si n et m sont deux entiers naturels non nuls, `rand(n,m)` renvoie une matrice de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont $n \times m$ nombres choisis au hasard dans l'intervalle $]0,1[$.

```
-->rand(2,3)
 ans  =
    0.0002211346291    0.6653811042197    0.8497452358715
    0.3303270917386    0.6283917883411    0.6857310198247
```

Rappelons que la commande `floor(x)` retourne la partie entière du nombre réel x. Si n est un entier naturel non nul, l'instruction `floor(rand()*n)` permet d'obtenir un nombre entier aléatoire compris entre 0 et $n-1$. Par exemple, la commande suivante renvoie un entier aléatoire compris entre 0 et 9 :

```
-->floor(rand()*10)
 ans  =
    2.
```

Exercice 1 On effectue des lancers d'une pièce telle que la probabilité de faire pile soit égale à $\frac{1}{3}$.

1. Construire une fonction `piece` qui permet de simuler un lancer de cette pièce et retourne 1 si on obtient pile et 0 si on obtient face.
2. Construire une fonction `lancers` qui, étant donné un entier naturel non nul n, permet d'obtenir le nombre de piles obtenus au cours de n lancers. Cette fonction utilisera la fonction `piece`.
3. Construire une fonction `frequence` permettant d'obtenir la fréquence d'apparition du pile au cour de n lancers. Cette fonction utilisera la fonction `lancers`.

   Tester pour $n = 10$, $n = 100$, $n = 1000$, $n = 10000$ et commenter les résultats obtenus.
4. Construire une fonction `rang` qui retourne le numéro du lancer où on obtient pour la première fois pile. Cette fonction utilisera la fonction `piece`.

Exercice 2 On considère la marche aléatoire d'un individu sur l'ensemble $\mathbb{Z}$: à l'instant 0, l'individu est à l'abscisse 0; à tout instant n, il se déplace d'une unité à gauche ou à droite avec la même probabilité.

1. Construire une fonction `marche` qui, étant donné un entier $n \in \mathbb{N}$, retourne l'abscisse où se situe l'individu à l'instant n.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note A_n l'événement : "l'individu est revenu à l'abscisse 0 au bout de n instants".
   (a) Que dire de l'événement A_n si n est impair ?
   (b) Calculer la probabilité p_n que l'événement A_n soit réalisé.
   (c) Avec Scilab, déterminer une valeur approchée de p_{10}.
3. (a) Construire une fonction `retour` qui, étant donné un entier naturel n, retourne 0 si l'événement A_n n'est pas réalisé et 1 s'il l'est. Cette fonction utilisera la fonction `marche`.
   (b) Recopier les instructions suivantes dans l'éditeur et exécuter :

```
n=input('Donner une valeur de n : ')
x=0
for k=1:n do
    x=x+retour(10)
end
disp(x/n)
```

   A quoi correspond le résultat obtenu ? Tester pour $n = 100$, $n = 1000$, $n = 10000$, $n = 100000$ et commenter les valeurs obtenues. Cela est-il cohérent avec le résultat de la question 2.(c) ?

Exercice 3 On lance 10 fois un dé équilibré à 6 faces. On cherche combien de fois le 6 apparait.

1. Construire une fonction `de` qui permet de simuler un lancer de dé équilibré et d'obtenir le résultat du lancer.
2. Construire une fonction `six` qui détermine le nombre de fois que 6 apparait au cours des 10 lancers. Cette fonction utilisera la fonction `de`.
3. Recopier les instructions suivantes dans l'éditeur et exécuter :

```
F=zeros(1,11)
for i=1:1000 do
    k=six()
    F(1,k+1)=F(1,k+1)+1
end
disp(F)
```

A quoi correspond le résultat obtenu ? Expliquer.

4. En utilisant la commande `bar`, tracer un diagramme représentant les fréquences d'apparitions de la face 6 au cours de ces 1000 expériences.

Exercice 4

1. Montrer que la probabilité p_n qu'au moins deux étudiants d'une même classe de n étudiants (n étant un entier supérieur ou égal à 2) aient leur anniversaire le même jour est donnée par la formule suivante (on exclu les années bissextiles) :

$$p_n = 1 - \prod_{k=0}^{n-1} \left(1 - \frac{k}{365}\right).$$

2. Écrire une fonction `anniversaire` qui, étant donné un entier $n \geq 2$, permet d'obtenir p_n.
3. Calculer la probabilité p_n pour la classe d'ECE1.
4. En calculant p_n pour différentes valeurs de n, conjecturer sur la limite de la suite $(p_n)_{n\geq 2}$ et interpréter.
5. A l'aide de la fonction `anniversaire`, construire une suite d'instructions permettant d'obtenir le nombre n d'étudiants de la classe à partir duquel la probabilité p_n dépasse $\frac{1}{2}$.