Correction du TP2

# Les boucles `for...do...end`

**Exercice 1** 1. On teste les instructions par exemple pour $n = 5$ ou $n = 10$ :

```
-->exec('C:\TP3.sce', -1)
Donner une valeur de n : 5
 S=
    15.
-->exec('C:\TP3.sce', -1)
Donner une valeur de n : 10
 S=
    55.
```

La valeur de $S$ à la fin de la boucle correspond à la somme $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ (avec la formule sur les sommes usuelles). Vérifions que le résultat donné par Scilab est le bon :

```
-->(5*(5+1))/2, (10*(10+1))/2
 ans  =
    15.
 ans  =
    55.
```

2. Voici les instructions pour calculer les trois premières sommes :

```
n=input('Donner une valeur de n : ')
S=0
for k=1:n do
    S=S+k^2
end
disp(S,'S=')
```

On teste les instructions pour $n = 5$, pour $n = 10$ et pour $n = 20$ :

```
-->exec('C:\exo1a.sce', -1)
Donner une valeur de n : 5
 S=
    55.
-->exec('C:\exo1a.sce', -1)
Donner une valeur de n : 10
 S=
    385.
-->exec('C:\exo1a.sce', -1)
Donner une valeur de n : 20
 S=
    2870.
```

La valeur de $S$ à la fin de la boucle correspond à la somme $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ (avec la formule sur les sommes usuelles). Vérifions que le résultat donné par Scilab est le bon :

```
-->(5*(5+1)*(2*5+1))/6, (10*(10+1)*(2*10+1))/6, (20*(20+1)*(2*20+1))/6
 ans  =
    55.
 ans  =
    385.
 ans  =
    2870.
```

Voici les instructions pour calculer les deux dernières sommes :

```
n=input('Donner une valeur de n : ')
S=0
for k=1:n do
```

```
    S=S+k^3
end
disp(S,'S=')
```

On teste les instructions pour $n = 5$ et pour $n = 10$ :

```
-->exec('C:\exo1b.sce', -1)
Donner une valeur de n : 5
 S=
    225.
-->exec('C:\exo1b.sce', -1)
Donner une valeur de n : 10
 S=
    3025.
```

La valeur de $S$ à la fin de la boucle correspond à la somme $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ (avec la formule sur les sommes usuelles). Vérifions que le résultat donné par Scilab est le bon :

```
-->(5^2*(5+1)^2)/4, (10^2*(10+1)^2)/4
 ans  =
    225.
 ans  =
    3025.
```

---

**Exercice 2** 1. Voici les instructions pour calculer la somme $S_n$ :

```
n=input('Donner une valeur de n : ')
S=0
for k=0:n do
    S=S+k^2+4*k+4
end
disp(S,'S=')
```

2. En utilisant la linéarité de la somme, on a :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{n}(k^2+4k+4) = \sum_{k=0}^{n} k^2 + 4\sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n} 4 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 4\frac{n(n+1)}{2} + 4(n+1) \\ &= (n+1)\left(\frac{n(2n+1)}{6} + 2n + 4\right) = \frac{n+1}{6}\left(2n^2+n+12n+24\right) = \frac{(n+1)(2n^2+13n+24)}{6}. \end{aligned}$$

3. En utilisant une identité remarquable, on a :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n}(k^2+4k+4) = \sum_{k=0}^{n}(k+2)^2.$$

On effectue un changement d'indice : On pose $i = k+2$. Comme $k$ parcourt les entiers entre 0 et $n$, $i$ parcourt les entiers entre 2 et $n+2$. Alors :

$$S_n = \sum_{i=2}^{n+2} i^2 = \sum_{i=1}^{n+2} i^2 - 1 = \frac{(n+2)(n+2+1)(2(n+2)+1)}{6} - 1 = \frac{(n+2)(n+3)(2n+5)}{6} - 1.$$

---

**Exercice 3** 1. Voici les instructions pour calculer $S_n$ et $T_n$ :

```
n=input('Donner une valeur de n : ')
S=0
for k=1:n do
    S=S+(2*k+1)/(k^2*(k+1)^2)
end
T=(n*(n+2))/(n+1)^2
disp(S,'S=')
disp(T,'T=')
```

2. On teste pour $n = 5, 10, 20$:

```
-->exec('C:\exo2.sce', -1)
Donner une valeur de n : 5
 S=
    0.9722222222222
 T=
    0.9722222222222
-->exec('C:\exo2.sce', -1)
Donner une valeur de n : 10
 S=
    0.9917355371901
 T=
    0.9917355371901
-->exec('C:\exo2.sce', -1)
Donner une valeur de n : 20
 S=
    0.9977324263039
 T=
    0.9977324263039
```

   On conjecture que $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n = T_n$.

3. Soit $k$ un entier naturel non nul. Alors :

$$\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2} = \frac{(k+1)^2 - k^2}{k^2(k+1)^2} = \frac{((k+1)+k)((k+1)-k)}{k^2(k+1)^2} = \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}.$$

4. On a alors :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}\right) = 1 - \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{(n+1)^2 - 1}{(n+1)^2} = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}.$$

---

**Exercice 4** 1. Pour calculer $n!$, on utilise la suite d'instructions suivantes :

```
n=input('Donner une valeur de n : ')
P=1
for k=1:n do
    P=P*k
end
disp(P,'P=')
```

2. Voici les instructions pour calculer les deux premiers produits :

```
n=input('Donner une valeur de n : ')
P=1
for k=1:n do
    P=P*(2^(2*k))/(3^k)
end
disp(P,'P=')
```

   On teste les instructions pour $n = 5$ et pour $n = 10$ :

```
-->exec('C:\exo3b.sce', -1)
Donner une valeur de n : 5
 P=
    74.830913880758
-->exec('C:\exo3b.sce', -1)
Donner une valeur de n : 10
 P=
    7440986.4459968
```

Calculons le produit $\prod_{k=1}^{n} \frac{2^{2k}}{3^k}$ à la main :

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{2^{2k}}{3^k} = \frac{\prod_{k=1}^{n} 2^{2k}}{\prod_{k=1}^{n} 3^k} = \frac{2^{2\times\sum_{k=1}^{n} k}}{3^{\sum_{k=1}^{n} k}} = \frac{2^{2\times\frac{n(n+1)}{2}}}{3^{\frac{n(n+1)}{2}}} = \frac{2^{n(n+1)}}{3^{\frac{n(n+1)}{2}}} = \left(\frac{2}{3^{\frac{1}{2}}}\right)^{n(n+1)}.$$

On vérifie avec Scilab qu'on obtient bien les résultats obtenus précédemment pour $n = 5$ et $n = 10$ :

```
-->(2/sqrt(3))^(5*(5+1))
 ans  =
    74.830913880758
-->(2/sqrt(3))^(10*(10+1))
 ans  =
    7440986.4459968
```

Voici les instructions pour calculer les deux derniers produits :

```
n=input('Donner une valeur de n: ')
P=1
for k=2:n do
    P=P*(1-1/k^2)
end
disp(P,'P=')
```

On teste les instructions pour $n = 5$ et pour $n = 10$:

```
-->exec('C:\exo3c.sce', -1)
Donner une valeur de n : 5
 P=
    0.6
-->exec('C:\exo3c.sce', -1)
Donner une valeur de n : 10
 P=
    0.55
```

Calculons le produit $\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$ à la main :

$$\begin{aligned}
\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) &= \prod_{k=2}^{n} \frac{k^2-1}{k^2} = \prod_{k=2}^{n} \frac{(k-1)(k+1)}{k^2} \\
&= \frac{1\times 3}{2^2} \times \frac{2\times 4}{3^2} \times \frac{3\times 5}{4^2} \times \ldots \times \frac{(n-2)n}{(n-1)^2} \times \frac{(n-1)(n+1)}{n^2} \\
&= \frac{1}{2} \times \frac{n+1}{n} = \frac{n+1}{2n}
\end{aligned}$$

On vérifie avec Scilab qu'on obtient bien les résultats obtenus précédemment pour $n = 5$ et $n = 10$ :

```
-->(5+1)/(2*5)
 ans  =
    0.6
-->(10+1)/(2*10)
 ans  =
    0.55
```