TP20

Simulations d'expériences aléatoires

Exercice 1 Une puce se déplace sur les trois sommets d'un triangle ABC du plan. Au départ, elle est en A. A chaque instant $n \in \mathbb{N}^*$, elle fait un saut :

- si elle est en A, elle va en B;
- si elle est en B, elle va en A avec la probabilité $\frac{1}{2}$ et en C avec la probabilité $\frac{1}{2}$;
- si elle est en C, elle y reste.

Sur Scilab, on représentera le fait que la puce se situe en A par 1, en B par 2 et en C par 3.

1. Construire une fonction `deplacement` qui, étant donnée la position de la puce (c'est-à-dire 1, 2 ou 3), simule un déplacement de la puce et affiche sa position à l'instant suivant.
2. Construire une fonction `puce` utilisant la fonction `deplacement` qui, étant donné un entier naturel n, calcule la position de la puce à l'instant n et affiche 1 si la puce est en A, 2 si elle est en B et 3 si elle est en C.
3. On peut démontrer que la puce arrive presque sûrement en C. Construire une fonction `arrivee` utilisant la fonction `deplacement`, qui simule l'expérience et affiche l'instant n à partir duquel la puce arrive au point C.

Exercice 2 Un dé cubique, dont les faces sont numérotées de 1 à 6, est tel que, lorsqu'on le lance, le 6 sort trois fois plus que le 1 alors que les numéros 1, 2, 3, 4 et 5 ont autant de chances d'apparaître.

1. Quelle est la probabilité de sortie de chaque numéro ?
2. Construire une fonction `de` qui simule le lancer de ce dé et retourne le numéro obtenu.
3. (a) Construire une fonction `frequence1` qui, étant donné un entier n, permet d'obtenir la fréquence d'apparition de chacun des numéros au cours de n lancers. Cette fonction utilisera la fonction `de`.
   (b) Tester pour $n = 1000$ et pour $n = 10000$. Pour chacun des cas, tracer le diagramme en bâtons des fréquences. Commenter les résultats obtenus.
4. (a) Quelle est la probabilité de sortie d'un numéro pair ?
   (b) Construire une fonction `frequence2` qui calcule la fréquence d'apparition d'un numéro pair lors de n lancers de ce dé. Cette fonction utilisera la fonction `de`.
   (c) Tester pour $n = 1000$ et pour $n = 10000$. Commenter les résultats obtenus.

Exercice 3 On lance 10 fois une pièce équilibrée. Si on obtient k piles, on effectue le tirage d'une boule dans une urne contenant k boules blanches et $10 - k$ boules noires. On cherche à déterminer la probabilité d'obtenir une boule blanche.

1. (a) Construire une fonction `piece` qui simule 10 lancers d'une pièce équilibrée et retourne le nombre de pile obtenus.
   (b) Construire une fonction `bouleblanche` qui simule l'expérience et retourne 0 si on obtient une boule noire et 1 si on obtient une boule blanche. Cette fonction utilisera la fonction `piece`.
   (c) Construire une fonction `frequence` qui, étant donné n, permet d'obtenir la fréquence d'apparition d'une boule blanche en répétant n fois cette expérience.
   Tester pour $n = 100$, pour $n = 1000$ et pour $n = 10000$.
2. On note A_k l'événement "on obtient k piles au cours des 10 lancers de la pièce" (où $0 \leq k \leq 10$) et B l'événement "on a obtenu une boule blanche".
   (a) Déterminer $P(A_k)$.
   (b) En déduire $P(B)$.
   (c) Comparer avec le résultat obtenu à la question 1.(c).

Exercice 4

1. Montrer que la probabilité p_n qu'au moins deux étudiants d'une même classe de n étudiants (n étant un entier supérieur ou égal à 2) aient leur anniversaire le même jour est donnée par la formule suivante (on exclu les années bissextiles) :

$$p_n = 1 - \prod_{k=0}^{n-1} \left(1 - \frac{k}{365}\right).$$

2. Écrire une fonction `anniversaire` qui, étant donné un entier $n \geq 2$, permet d'obtenir p_n.
3. Calculer la probabilité p_n pour la classe d'ECE1.
4. En calculant p_n pour différentes valeurs de n, conjecturer sur la limite de la suite $(p_n)_{n\geq 2}$ et interpréter.
5. A l'aide de la fonction `anniversaire`, construire une suite d'instructions permettant d'obtenir le nombre n d'étudiants de la classe à partir duquel la probabilité p_n dépasse $\frac{1}{2}$.