Correction du TP21

Suites récurrentes

Exercice 1 1. f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. On a, pour tout réel x,

$$f'(x) = e^x - 1.$$

On obtient le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

D'après les variations de f, $f(x) \geq f(0) = 0$. Donc f est positive sur $\mathbb{R}$.

2. $u_{n+1} - u_n = e^{u_n} - 1 - u_n = f(u_n) \geq 0$ d'après la question 1. Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

3. Remarquons que $u_{n+1} = e^{u_n} - 1 \Leftrightarrow f(u_n) = 0$. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite finie ℓ, alors en passant à la limite dans la relation $f(u_n) = 0$, on obtient $f(\ell) = 0$ (par continuité de f). D'après la question 1, $\ell = 0$.

4. Si $u_0 = 0$, $u_1 = e^{u_0} - 1 = e^0 - 1 = 0$. Et par récurrence, on montre que pour tout entier naturel n, $u_n = 0$.

5. (a) Notons $\mathcal{P}(n)$ la propriété : "$u_n < 0$". Montrons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   Initialisation : Par hypothèse, $u_0 < 0$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
   Hérédité : Soit n un entier naturel. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Par hypothèse de récurrence, $u_n < 0$. Donc $u_{n+1} = e^{u_n} - 1 < 0$. Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
   Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < 0$.

   (b) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par 0. D'après le théorème des suites monotones, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite finie $\ell \leq 0$. Et d'après la question 3, cette limite vaut nécessairement 0. Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

6. (a) Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers une limite finie ℓ. Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, $\ell \geq u_0 > 0$. Or, d'après la question 3, $\ell = 0$. On obtient donc une contradiction. Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente.

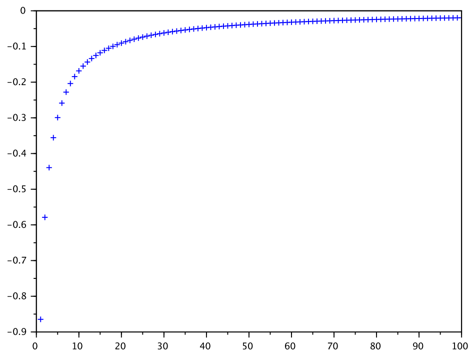
   (b) Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, d'après le théorème des suites monotones, soit elle est convergente, soit elle diverge vers $+\infty$. D'après la question précédente, elle n'est pas convergente. Donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

7. (a) Voici la fonction **u** :

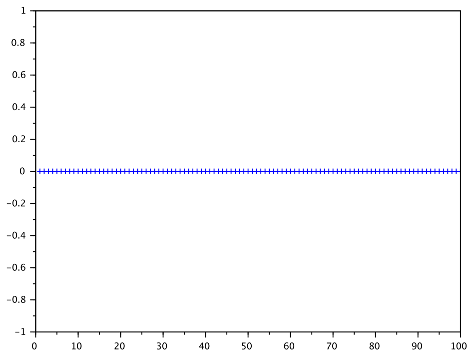
```
function res=u(a,n)
    res=a
    for k=1:n do
        res=exp(res)-1
    end
endfunction
```

   (b) La liste `L` contient les 100 termes $u_1, u_2, \ldots, u_{100}$ de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Ces commandes permettent d'obtenir une représentation graphique des premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ après avoir donné une valeur pour u_0.
   En testant pour $u_0 = -2$ et pour $u_0 = 0$, on obtient les représentations graphiques suivantes :

Pour $u_0 = -2$:



Pour $u_0 = 0$:



Cela confirme les résultats obtenus aux questions 4 et 5.

(c) Voici la fonction `rangu` :

```
function n=rangu(A)
    n=0
    while u(1,n)<=A do
        n=n+1
    end
endfunction
```

En testant pour $A = 10$, $A = 100$, $A = 1000$, on obtient :

```
-->rangu(10)
 ans  =
    3.
-->rangu(100)
 ans  =
    4.
-->rangu(1000)
 ans  =
    4.
```

On a vu à la question 6 que lorsque $u_0 > 0$ (ce qui est le cas ici puisque $u_0 = 1$), la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$. Cela est confirmé par les valeurs précédentes. On remarque de plus que la suite diverge très rapidement vers $+\infty$.

Exercice 2 1. f est définie, continue et dérivable sur $[0, +\infty[$ et on a, pour tout $x \geq 0$,

$$f'(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}.$$

On obtient le tableau de variation suivant :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	
$f(x)$	1 ↘	0

En particulier, $f([\frac{1}{2}, 1]) = [f(1), f(\frac{1}{2})] = [\frac{1}{2}, \frac{2}{3}] \subset [\frac{1}{2}, 1]$.

2. Notons $\mathcal{P}(n)$ la propriété : "v_n est bien définie et $v_n \in [\frac{1}{2}, 1]$". Montrons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   Initialisation : Par hypothèse, $v_0 = 1 \in [\frac{1}{2}, 1]$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

   Hérédité : Soit n un entier naturel. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

   $v_{n+1} = \dfrac{1}{1+v_n}$ est bien défini car $1 + v_n \neq 0$ (car par hypothèse de récurrence, $v_n \in [\frac{1}{2}, 1]$).

   Comme $v_n \in [\frac{1}{2}, 1]$ (hypothèse de récurrence) et $f([\frac{1}{2}, 1]) \subset [\frac{1}{2}, 1]$ (question 1), on a donc $v_{n+1} = f(v_n) \in [\frac{1}{2}, 1]$.

   Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, v_n est bien défini et $v_n \in [\frac{1}{2}, 1]$.

3. Supposons que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et notons ℓ sa limite. Alors, en faisant tendre n vers $+\infty$ dans la relation $v_{n+1} = f(v_n)$, on a (par continuité de f) :

$$\ell = f(\ell) \Leftrightarrow \ell = \frac{1}{1+\ell} \Leftrightarrow \ell(1+\ell) = 1 \Leftrightarrow \ell^2 + \ell - 1 = 0 \Leftrightarrow \ell = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

   D'après la question précédente, $v_n \in [\frac{1}{2}, 1]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc $\ell \in [\frac{1}{2}, 1]$. On en déduit que $\ell = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

   Ainsi ℓ est unique et vaut $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

4. On a vu que, pour tout $x \geq 0$, $f'(x) = \dfrac{-1}{(1+x)^2}$ (qui est une fonction croissante, à voir par exemple en calculant $f''(x)$). Alors, pour tout $x \in [\frac{1}{2}, 1]$,

$$-\frac{4}{9} = \frac{-1}{(1+\frac{1}{2})^2} \leq \frac{-1}{(1+x)^2} \leq \frac{-1}{(1+1)^2} = -\frac{1}{4}.$$

   Donc, pour tout $x \in [\frac{1}{2}, 1]$, $|f'(x)| \leq \max(\frac{4}{9}, \frac{1}{4}) = \frac{4}{9}$.

5. D'après l'inégalité des accroissements finis, on obtient :

$$\forall x, y \in [\frac{1}{2}, 1],\ |f(x) - f(y)| \leq \frac{4}{9}|x - y|.$$

   En prenant $x = v_n$ et $y = \ell$, on a donc $|f(v_n) - f(\ell)| \leq \frac{4}{9}|v_n - \ell|$. Comme $v_{n+1} = f(v_n)$ et $f(\ell) = \ell$, on obtient finalement : $|v_{n+1} - \ell| \leq \frac{4}{9}|v_n - \ell|$.

6. Notons $\mathcal{P}(n)$ la propriété : "$|v_n - \ell| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n |v_0 - \ell|$". Montrons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   Initialisation : Par hypothèse, $|v_0 - \ell| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^0 |v_0 - \ell|$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

   Hérédité : Soit n un entier naturel. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

$$|v_{n+1} - \ell| \leq \frac{4}{9}|v_n - \ell| \leq \frac{4}{9} \times \left(\frac{4}{9}\right)^n |v_0 - \ell| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^{n+1} |v_0 - \ell|$$

   en utilisant la question précédente à la première inégalité et l'hypothèse de récurrence à la deuxième. Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

   Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|v_n - \ell| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n |v_0 - \ell|$.

7. Comme $\frac{4}{9} \in]-1, 1[$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{4}{9}\right)^n = 0$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} |v_n - \ell| = 0$, c'est-à-dire $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

8. On cherche N tel que $\left(\frac{4}{9}\right)^N |v_0 - \ell| \leq 10^{-9}$. On a :

$$\begin{aligned}
\left(\frac{4}{9}\right)^n |v_0 - \ell| \leq 10^{-9} \quad & \Leftrightarrow \quad \ln\left(\left(\frac{4}{9}\right)^n |v_0 - \ell|\right) \leq \ln(10^{-9}) \\
& \Leftrightarrow \quad n \ln\left(\frac{4}{9}\right) + \ln\left(|v_0 - \ell|\right) \leq \ln(10^{-9}) \\
& \Leftrightarrow \quad n \geq \frac{\ln(10^{-9}) - \ln\left(|v_0 - \ell|\right)}{\ln\left(\frac{4}{9}\right)} = \frac{\ln(10^{-9}) - \ln\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)}{\ln\left(\frac{4}{9}\right)} \simeq 24,37
\end{aligned}$$

Donc $N = 25$.

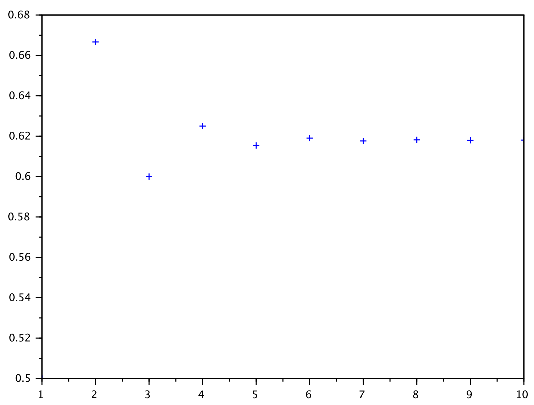
9. (a) Voici la fonction `v` :

```
function res=v(n)
    res=1
    for k=1:n do
        res=1/(1+res)
    end
endfunction
```

(b) Voici les instructions à entrer dans l'éditeur pour obtenir la représentation graphique des termes $v_1, v_2, \ldots, v_{10}$ de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

```
L=zeros(1,10)
for k=1:10 do
    L(k)=v(k)
end
clf
plot(L,"+")
```

On obtient le résultat suivant :



La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ semble converger rapidement vers $\ell = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

(c) Voici la fonction `rangv` :

```
function n=rangv()
    n=0
    l=(-1+sqrt(5))/2
    while abs(v(n)-l)>10^(-9) do
        n=n+1
    end
endfunction
```

On obtient $n = 21$. Ceci confirme la convergence rapide de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers ℓ.