Correction du TP22

Processus de Markov

Exercice 1 1. (a) D'après l'énoncé, $P_{D_n}(D_{n+1}) = \frac{9}{10}$, $P_{D_n}(M_{n+1}) = \frac{1}{20}$, $P_{D_n}(E_{n+1}) = \frac{1}{20}$, $P_{M_n}(D_{n+1}) = \frac{7}{10}$, $P_{M_n}(M_{n+1}) = 0$, $P_{M_n}(E_{n+1}) = \frac{3}{10}$, $P_{E_n}(D_{n+1}) = \frac{8}{10}$, $P_{E_n}(M_{n+1}) = 0$ et $P_{E_n}(E_{n+1}) = \frac{2}{10}$.

(b) On considère le système complet d'événements (D_n, M_n, E_n). Alors :

$$D_{n+1} = (D_n \cap D_{n+1}) \cup (M_n \cap D_{n+1}) \cup (E_n \cap D_{n+1}).$$

On a donc :

$$\begin{aligned}
d_{n+1} &= P(D_{n+1}) = P((D_n \cap D_{n+1}) \cup (M_n \cap D_{n+1}) \cup (E_n \cap D_{n+1}))\\
&= P(D_n \cap D_{n+1}) + P(M_n \cap D_{n+1}) + P(E_n \cap D_{n+1})\\
&= P(D_n)P_{D_n}(D_{n+1}) + P(M_n)P_{M_n}(D_{n+1}) + P(E_n)P_{E_n}(D_{n+1})\\
&= \frac{9}{10}d_n + \frac{7}{10}m_n + \frac{8}{10}e_n,
\end{aligned}$$

en utilisant le fait que les événements sont incompatibles à la troisième égalité et la formule des probabilités composées à la quatrième.

De la même façon, on obtient :

$$\begin{aligned}
m_{n+1} = P(M_{n+1}) &= P(D_n)P_{D_n}(M_{n+1}) + P(M_n)P_{M_n}(M_{n+1}) + P(E_n)P_{E_n}(M_{n+1})\\
&= \frac{1}{20}d_n\\
e_{n+1} = P(E_{n+1}) &= P(D_n)P_{D_n}(E_{n+1}) + P(M_n)P_{M_n}(E_{n+1}) + P(E_n)P_{E_n}(E_{n+1})\\
&= \frac{1}{20}d_n + \frac{3}{10}m_n + \frac{2}{10}e_n.
\end{aligned}$$

(c) On pose alors $A = \begin{pmatrix} \frac{9}{10} & \frac{7}{10} & \frac{8}{10} \\ \frac{1}{20} & 0 & 0 \\ \frac{1}{20} & \frac{3}{10} & \frac{2}{10} \end{pmatrix}$, de sorte que :

$$U_{n+1} = \begin{pmatrix} d_{n+1} \\ m_{n+1} \\ e_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{10}d_n + \frac{7}{10}m_n + \frac{8}{10}e_n \\ \frac{1}{20}d_n \\ \frac{1}{20}d_n + \frac{3}{10}m_n + \frac{2}{10}e_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{10} & \frac{7}{10} & \frac{8}{10} \\ \frac{1}{20} & 0 & 0 \\ \frac{1}{20} & \frac{3}{10} & \frac{2}{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_n \\ m_n \\ e_n \end{pmatrix}.$$

(d) Notons $\mathcal{P}(n)$ la propriété "$U_n = A^n U_0$" et montrons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.
<u>Initialisation</u> : $A^0U_0 = I_3U_0 = U_0$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
<u>Hérédité</u> : Soit n un entier naturel. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

$$U_{n+1} = AU_n = AA^nU_0 = A^{n+1}U_0,$$

en utilisant la question précédente pour la première égalité et l'hypothèse de récurrence à la deuxième. Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
<u>Conclusion</u> : Par le principe de récurrence, pour tout entier naturel n, $U_n = A^nU_0$.

Comme Doudou dort à l'instant 0, $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

2. (a) Voici le programme Scilab qui permet de calculer U_n :

```
n=input('Entrer n: ')
A=[0.9,0.7,0.8;0.05,0,0;0.05,0.3,0.2]
U=[1;0;0]
for k=1:n do
    U=A*U
end
disp(U)
```

(b) On teste pour différentes valeurs de n :

- Pour $n = 10$:

```
-->exec('C:\TP21-Processus de Markov\cor2.sce', -1)
Entrer n: 10
    0.8839779005531
    0.0441988950281
    0.0718232044188
```

- Pour $n = 100$:

```
-->exec('C:\TP21-Processus de Markov\cor2.sce', -1)
Entrer n: 100
    0.8839779005525
    0.0441988950276
    0.0718232044199
```

- Pour $n = 1000$:

```
-->exec('C:\TP21-Processus de Markov\cor2.sce', -1)
Entrer n: 1000
    0.8839779005525
    0.0441988950276
    0.0718232044199
```

On semble converger très rapidement vers un état stable. Pour n assez grand, $d_n \simeq 88,4\%$, $m_n \simeq 4,4\%$ et $e_n \simeq 7,2\%$.

3. (a) Voici le programme complété pour qu'il simule la suite des états $X_0, X_1, \ldots, X_n$:

```
n=input('Entrer n: ')
X=zeros(1,n+1)
X(1)=1
for k=1:n do
    if X(k)==1 then
        if rand()<9/10 then
            X(k+1)=1
        else
            if rand()<1/2 then
                X(k+1)=2
            else
                X(k+1)=3
            end
        end
    elseif X(k)==2 then
        if rand()<3/10 then
            X(k+1)=3
        else
            X(k+1)=1
        end
    else
        if rand()<8/10 then
            X(k+1)=1
        else
            X(k+1)=3
        end
    end
end
disp(X)
```

(b) On teste pour différentes valeurs de n :

```
-->A=[0.9,0.7,0.8;0.05,0,0;0.05,0.3,0.2]
 A  =
    0.9     0.7    0.8
    0.05    0.     0.
    0.05    0.3    0.2
-->X=grand(10,'markov',A',1)
 X  =
    1.    1.    2.    3.    1.    3.    3.    1.    1.    1.
-->X=grand(20,'markov',A',1)
 X  =
         column  1 to 15
    1.    1.    1.    1.    1.    3.    3.    3.    3.    3.    1.    1.    3.    3.
         column 16 to 20
    1.    1.    1.    1.    1.
-->X=grand(50,'markov',A',1)
 X  =
         column  1 to 15
    1.    1.    1.    1.    2.    1.    1.    1.    3.    1.    1.    1.    1.    1.
         column 16 to 30
    1.    2.    1.    1.    1.    1.    1.    1.    1.    1.    1.    1.    1.    1.
         column 31 to 45
    1.    1.    1.    1.    1.    1.    1.    1.    1.    3.    3.    3.    1.    1.
         column 46 to 50
    1.    3.    1.    1.    1.
```

4. (a) Après exécution des instructions données dans l'énoncé, on obtient :

```
-->exec('C:\TP21-Processus de Markov\exple2.sce', -1)
Entrer n: 10
    1.    1.    1.    1.    3.    1.    1.    1.    1.    1.
-->exec('C:\TP21-Processus de Markov\exple2.sce', -1)
Entrer n: 20
         column  1 to 15

    1.    1.    1.    1.    1.    1.    1.    1.    1.    1.    1.    2.    1.    1.
         column 16 to 20
    1.    1.    1.    3.    1.
-->exec('C:\TP21-Processus de Markov\exple2.sce', -1)
Entrer n: 50
         column  1 to 15
    1.    1.    1.    1.    1.    1.    1.    1.    1.    1.    1.    1.    1.    1.
         column 16 to 30
    1.    1.    1.    1.    1.    1.    1.    1.    1.    3.    1.    1.    1.    3.
         column 31 to 45
    1.    1.    1.    1.    1.    1.    1.    2.    1.    1.    1.    3.    1.    1.
         column 46 to 50
    1.    2.    1.    1.    1.
```

Le vecteur p représente l'état de Doudou au bout d'une heure et en faisant n simulations.

(b) L'instruction `M=tabul(p,'i')` permet d'obtenir les modalités de chaque état, c'est-à-dire le nombre de simulation aboutissant à l'état 1, 2 ou 3.

En exécutant le programme de la question précédente pour $n = 1000$ et en faisant ensuite `M=tabul(p,'i')`, on obtient :

```
-->M=tabul(p,"i")
 M  =
    1.    896.
    2.    36.
    3.    68.
```

La fréquence de chacun des états de Doudou au bout d'une heure est donc 0.896 pour l'état 1 (dormir), 0.036 pour l'état 2 (manger) et 0.068 pour l'état 3 (courir). On remarque que ces résultats sont proches de ceux obtenus à la question 2. lorsqu'on avait calculé la probabilité théorique de chacun des états. Ainsi, les fréquences d'apparitions des états semblent tendre vers les probabilités théoriques des états lorsque n est grand.

Exercice 2 1. (a) On considère le système complet d'événements (A_n, B_n, C_n). Alors :

$$A_{n+1} = (A_n \cap A_{n+1}) \cup (B_n \cap A_{n+1}) \cup (C_n \cap A_{n+1}).$$

On a donc :

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= P(A_{n+1}) = P((A_n \cap A_{n+1}) \cup (B_n \cap A_{n+1}) \cup (C_n \cap A_{n+1})) \\ &= P(A_n \cap A_{n+1}) + P(B_n \cap A_{n+1}) + P(C_n \cap A_{n+1}) \\ &= P(A_n)P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(A_{n+1}) + P(C_n)P_{C_n}(A_{n+1}) \\ &= \frac{1}{2}a_n\frac{3}{4}b_n, \end{aligned}$$

en utilisant le fait que les événements sont incompatibles à la troisième égalité et la formule des probabilités composées à la quatrième.

De la même façon,

$$\begin{aligned} b_{n+1} = P(B_{n+1}) &= P(A_n)P_{A_n}(B_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(B_{n+1}) + P(C_n)P_{C_n}(B_{n+1}) \\ &= \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}c_n \\ c_{n+1} = P(C_{n+1}) &= P(A_n)P_{A_n}(C_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(C_{n+1}) + P(C_n)P_{C_n}(C_{n+1}) \\ &= \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{2}c_n. \end{aligned}$$

(b) On pose alors $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ de sorte que $U_{n+1} = AU_n$.

(c) Par récurrence. Laissée au lecteur.

2. (a) Voici la procédure demandée :

```
p=zeros(1,100)
A=[1/2,3/4,0;1/2,0,1/2;0,1/4,1/2]
for k=1:100 do
    X=grand(10,'markov',A',2)
    p(k)=X(10)
end
disp(p)
```

(b) Après avoir exécuté la procédure précédente, on obtient :

```
-->M=tabul(p,'i')
 M  =
    1.    43.
    2.    41.
    3.    16.
```

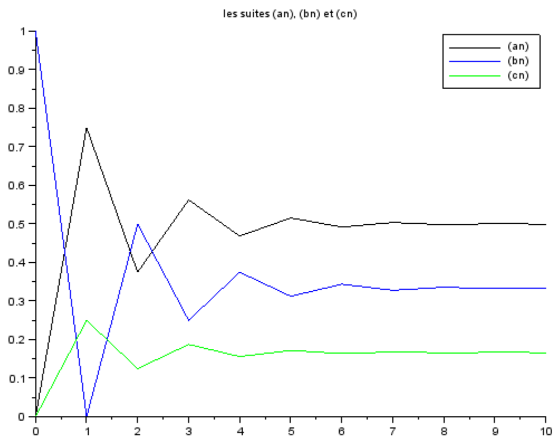
Ainsi, on obtient les fréquences suivantes: 0.43 pour l'état 1, 0.41 pour l'état 2 et 0.16 pour l'état 3.

3. (a) La procédure de l'énoncé permet de calculer les probabilités théoriques de chacun des états pour n allant de 0 à 10 et de stocker celles-ci dans la matrice E. Le tableau des états de la loi théorique de X_{10} se trouve à la dernière colonne de la matrice E. Après avoir exécuté la procédure, on obtient :

```
-->exec('C:\TP21-Processus de Markov\exple3.sce', -1)
         column 1 to 8
    0.     0.75     0.375     0.5625     0.46875     0.515625     0.4921875     0.50390625
    1.     0.       0.5       0.25       0.375       0.3125       0.34375       0.328125
    0.     0.25     0.125     0.1875     0.15625     0.171875     0.1640625     0.16796875
         column  9 to 11
    0.498046875     0.5009765625     0.49951171875
    0.3359375       0.33203125       0.333984375
    0.166015625     0.1669921875     0.16650390625
```

Ainsi, au bout de 10 heures de travail, la probabilité d'être dans l'état 1 est 0.50, la probabilité d'être dans l'état 2 est 0.33 et la probabilité d'être dans l'état 3 est 0.17. Ces résultats sont proches des fréquences obtenues à la question 2. Ainsi, l'expérience semble converger vers un état stable lorsque n est grand.

(b) Après avoir exécuté les instructions de l'énoncé, on obtient le graphique suivant :



Cela confirme les résultats obtenus précédemment : il semble y avoir convergence vers un état stable.

4. (a) Laissée au lecteur. On obtient $P^{-1} = \dfrac{1}{12}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -3 & 0 & 9 \end{pmatrix}$.

(b) Laissée au lecteur. On obtient $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$.

(c) Notons $\mathcal{P}(n)$ la propriété "$D^n = P^{-1}A^nP$" et montrons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.
Initialisation : $D^0 = I_3$ et $P^{-1}A^0P = P^{-1}I_3P = P^{-1}P = I_3$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
Hérédité : Soit n un entier naturel. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

$$D^{n+1} = D^nD = P^{-1}A^nPP^{-1}AP = P^{-1}A^nI_3AP = P^{-1}A^{n+1}P,$$

en utilisant la question précédente et l'hypothèse de récurrence à la deuxième égalité. Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
Conclusion : Par le principe de récurrence, pour tout entier naturel n, $D^n = P^{-1}A^nP$.

(d) Donc $A^n = PD^nP^{-1}$. Or D est une matrice diagonale, donc :

$$D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1/2)^n & 0 \\ 0 & 0 & (1/2)^n \end{pmatrix}.$$

On en déduit alors par produit matriciel que :

$$A^n = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 6+3\left(-\frac{1}{2}\right)^n+3\left(\frac{1}{2}\right)^n & 6-6\left(-\frac{1}{2}\right)^n & 6+3\left(-\frac{1}{2}\right)^n-9\left(\frac{1}{2}\right)^n \\ 4-4\left(-\frac{1}{2}\right)^n & 4+8\left(-\frac{1}{2}\right)^n & 4-4\left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ 2+\left(-\frac{1}{2}\right)^n-3\left(\frac{1}{2}\right)^n & 2-2\left(-\frac{1}{2}\right)^n & 2+\left(-\frac{1}{2}\right)^n+9\left(\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix}.$$

D'après la question 1.(c), $U_n = A^nU_0$ et $U_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Donc :

$$a_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^n, \quad b_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n, \quad c_n = \frac{1}{6} - \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^n.$$

(e) On obtient $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \dfrac{1}{2}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \dfrac{1}{3}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = \dfrac{1}{6}$.
Ces résultats sont cohérents avec ceux obtenus aux questions 2. et 3.