Correction du TP23

Chaînes de Markov

Exercice 1 1. $X_1(\Omega) = [\![1, 3]\!]$ et $P(X_1 = 1) = P(X_1 = 2) = P(X_1 = 3) = \frac{1}{3}$.

2. (a)
   - Pour $j = 1$, on a :
   $$P_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 1) = \frac{1}{3},\ \ P_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 2) = \frac{1}{3},\ \ P_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 3) = \frac{1}{3}.$$
   En effet, si au n-ième tirage, on a tiré la boule numéro 1 (et donc si $X_n = 1$), alors on procède au $(n+1)$-ième tirage et X_{n+1} prend la valeur du numéro obtenu à ce $(n+1)$-ième tirage. On a alors, par équiprobabilité, $\frac{1}{3}$ de chance d'obtenir chacun des numéros 1, 2 ou 3.
   - Pour $j = 2$, on a :
   $$P_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 1) = \frac{2}{3},\ \ P_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 2) = \frac{1}{3},\ \ P_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 3) = 0.$$
   En effet, si au n-ième tirage, on a tiré la boule numéro 2 (et donc si $X_n = 2$), alors on procède au $(n+1)$-ième tirage et $X_{n+1} = 2$ si la boule tirée porte le numéro 2 (il y a donc $\frac{1}{3}$ de chance), $X_{n+1} = 1$ si la boule tirée porte le numéro 1 ou 3 (il y a donc $\frac{2}{3}$ de chance) et il est impossible que $X_{n+1} = 3$.
   - Pour $j = 3$, on a :
   $$P_{(X_n=3)}(X_{n+1} = 1) = \frac{2}{3},\ \ P_{(X_n=3)}(X_{n+1} = 2) = 0,\ \ P_{(X_n=3)}(X_{n+1} = 3) = \frac{1}{3}.$$
   En effet, si au n-ième tirage, on a tiré la boule numéro 3 (et donc si $X_n = 3$), alors on procède au $(n+1)$-ième tirage et $X_{n+1} = 3$ si la boule tirée porte le numéro 3 (il y a donc $\frac{1}{3}$ de chance), $X_{n+1} = 1$ si la boule tirée porte le numéro 1 ou 2 (il y a donc $\frac{2}{3}$ de chance) et il est impossible que $X_{n+1} = 2$.

   (b) Avec le système complet d'événements $((X_n = 1), (X_n = 2), (X_n = 3))$, on a :
   $$(X_{n+1} = 1) = ((X_n = 1) \cap (X_{n+1} = 1)) \cup ((X_n = 2) \cap (X_{n+1} = 1)) \cup ((X_n = 3) \cap (X_{n+1} = 1)).$$
   Alors :
   $$\begin{aligned}
   & P(X_{n+1} = 1) \\
   = \ & P(((X_n = 1) \cap (X_{n+1} = 1)) \cup ((X_n = 2) \cap (X_{n+1} = 1)) \cup ((X_n = 3) \cap (X_{n+1} = 1))) \\
   = \ & P((X_n = 1) \cap (X_{n+1} = 1)) + P((X_n = 2) \cap (X_{n+1} = 1)) + P((X_n = 3) \cap (X_{n+1} = 1)) \\
   = \ & P(X_n = 1)P_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 1) + P(X_n = 2)P_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 1) + P(X_n = 3)P_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 1) \\
   = \ & \frac{1}{3}P(X_n = 1) + \frac{2}{3}P(X_n = 2) + \frac{2}{3}P(X_n = 3),
   \end{aligned}$$
   en utilisant le fait que c'est une union d'événements incompatibles à la deuxième égalité et la formule des probabilités composées à la troisième.
   De même, on obtient que :
   $$\begin{aligned}
   P(X_{n+1} = 2) &= \frac{1}{3}P(X_n = 1) + \frac{1}{3}P(X_n = 2) \\
   P(X_{n+1} = 3) &= \frac{1}{3}P(X_n = 1) + \frac{1}{3}P(X_n = 3)
   \end{aligned}$$
   Ainsi, $U_{n+1} = AU_n$ avec $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

(c) Notons $\mathcal{P}(n)$ la propriété "$U_n = A^n U_0$" et montrons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.
Initialisation : $A^0 U_0 = I_3 U_0 = U_0$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
Hérédité : Soit n un entier naturel. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est aussi vérifiée.
Avec la question précédente, $U_{n+1} = AU_n$. Or, d'après l'hypothèse de récurrence, $U_n = A^n U_0$. Donc $U_{n+1} = AA^n U_0 = A^{n+1} U_0$. Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
Conclusion : Par le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n = A^n U_0$.

(d) Comme $U_n = A^n U_0$ et que $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, on lit la loi de X_n sur la première colonne de A^n.

(e) Voici les instructions pour simuler l'expérience :

```
n=input('Donner n:')
A=[1/3 2/3 2/3;1/3 1/3 0;1/3 0 1/3]
X1=floor(rand()*3)+1
X=grand(n,'markov',A',X1)
disp(X)
```

3. (a) Par définition de l'espérance, on a :

$$\begin{aligned} E(X) &= 1 \times P(X_n = 1) + 2P(X_n = 2) + 3P(X_n = 3) \\ &= \frac{1}{2}\left(1 + \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right) + \frac{5}{4}\left(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right) = \frac{7}{4} - \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n. \end{aligned}$$

En particulier, $\lim_{n \to +\infty} E(X_n) = \frac{7}{4}$.

(b) Voici les instructions pour simuler l'expérience et calculer la moyenne :

```
n=input('Donner n:')
A=[1/3 2/3 2/3;1/3 1/3 0;1/3 0 1/3]
S=0
for k=1:n do
    X1=floor(rand()*3)+1
    X=grand(n,'markov',A',X1)
    S=S+X(n)
end
m=S/n
disp(m)
```

(c) On teste pour $n = 100$, $n = 1000$, $n = 10000$:

```
-->exec('C:\TP24-Chaîne de Markov\exo1b.sce', -1)
Donner n:100
    1.78
-->exec('C:\TP24-Chaîne de Markov\exo1b.sce', -1)
Donner n:1000
    1.77
-->exec('C:\TP24-Chaîne de Markov\exo1b.sce', -1)
Donner n:10000
    1.7533
```

On remarque que ces valeurs convergent vers $1,75$, c'est-à-dire la limite obtenue à la question 3.(a).

Exercice 2 1. (a) $N^2 = 4bN$.
Notons $\mathcal{P}(k)$ la propriété : "il existe un réel u_k tel que $N^k = u_k N$". Montrons que $\mathcal{P}(k)$ est vraie pour tout $k \geq 1$.
Initialisation : $N^1 = 1 \times N$ donc $u_1 = 1$ convient. Donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
Hérédité : Soit un entier $k \geq 1$. Supposons que $\mathcal{P}(k)$ est vraie. Montrons que $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.
Par hypothèse de récurrence, $N^k = u_k N$. Alors $N^{k+1} = N^k \times N = u_k N \times N = u_k N^2 = u_k \times 4bN$.
On pose alors $u_{k+1} = 4b \times u_k$ et on a bien $N^{k+1} = u_{k+1} N$. Donc $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.
Conclusion : Par le principe de récurrence, pour tout $k \geq 1$, il existe un réel u_k tel que $N^k = u_k N$.

(b) $u_1 = 1$ et $u_{k+1} = (4b) \times u_k$. Donc $u_k = (4b)^{k-1}$ (formule sur les suites géométriques). Et $N^k = (4b)^{k-1}N$. Cette formule n'est pas vraie pour $k = 0$ car $N^0 = I \neq \frac{1}{4b}N$.

(c) On montre que $M = N + (a - b)I$.

(d) Avec la formule du binôme, comme $NI = IN = N$,

$$\begin{aligned}
M^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k (a-b)^{n-k} I^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (a-b)^{n-k} N^k \\
&= \binom{n}{0} (a-b)^n I + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (a-b)^{n-k} N^k \\
&= (a-b)^n I + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (a-b)^{n-k} (4b)^{k-1} N \\
&= (a-b)^n I + \frac{1}{4b} \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (a-b)^{n-k} (4b)^k - (a-b)^n \right) N \\
&= (a-b)^n I + \frac{(a+3b)^n - (a-b)^n}{4b} N.
\end{aligned}$$

2. (a) $(X_n = 1)$, $(X_n = 2)$, $(X_n = 3)$, $(X_n = 4)$ est un système complet d'événements, donc :

$$(X_{n+1} = 1) = ((X_n = 1) \cap (X_{n+1} = 1)) \cup ((X_n = 2) \cap (X_{n+1} = 1)) \cup ((X_n = 3) \cap (X_{n+1} = 1))$$

On a alors :

$$\begin{aligned}
& P(X_{n+1} = 1) \\
= \; & P(((X_n = 1) \cap (X_{n+1} = 1)) \cup ((X_n = 2) \cap (X_{n+1} = 1)) \cup ((X_n = 3) \cap (X_{n+1} = 1))) \\
= \; & P((X_n = 1) \cap (X_{n+1} = 1)) + P((X_n = 2) \cap (X_{n+1} = 1)) + P((X_n = 3) \cap (X_{n+1} = 1)) \\
= \; & P_{(X_n=1}(X_{n+1} = 1)P(X_n = 1) + P_{(X_n=2}(X_{n+1} = 1)P(X_n = 2) \\
& + P_{(X_n=3}(X_{n+1} = 1)P(X_n = 3) + P_{(X_n=4}(X_{n+1} = 1)P(X_n = 4) \\
= \; & \frac{1}{2}P(X_n = 1) + \frac{1}{6}P(X_n = 2) + \frac{1}{6}P(X_n = 3) + \frac{1}{6}P(X_n = 4),
\end{aligned}$$

en utilisant le fait que c'est une union d'événements incompatibles à la deuxième égalité et la formule des probabilités totales à la troisième.
De la même manière, on obtient :

$$\begin{aligned}
P(X_{n+1} = 2) &= \frac{1}{6}P(X_n = 1) + \frac{1}{2}P(X_n = 2) + \frac{1}{6}P(X_n = 3) + \frac{1}{6}P(X_n = 4) \\
P(X_{n+1} = 3) &= \frac{1}{6}P(X_n = 1) + \frac{1}{6}P(X_n = 2) + \frac{1}{2}P(X_n = 3) + \frac{1}{6}P(X_n = 4) \\
P(X_{n+1} = 4) &= \frac{1}{6}P(X_n = 1) + \frac{1}{6}P(X_n = 2) + \frac{1}{6}P(X_n = 3) + \frac{1}{2}P(X_n = 4).
\end{aligned}$$

(b) Donc $U_{n+1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 1/2 & 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 & 1/2 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/2 \end{pmatrix} U_n$, c'est à dire la matrice M de la question 1 avec $a = \frac{1}{2}$ et $b = \frac{1}{6}$.

(c) Récurrence laissée au lecteur.

(d) D'après la question 1.(d), on a :

$$M^n = (\frac{1}{2} - \frac{1}{6})^n I + \frac{(\frac{1}{2} + \frac{3}{6})^n - (\frac{1}{2} - \frac{1}{6})^n}{\frac{4}{6}} N = (\frac{1}{3})^n I + 3\frac{1 - (\frac{1}{3})^n}{2} N,$$

où N est la matrice de la question 1 avec $b = \frac{1}{6}$.

Comme $U_0 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$, on obtient :

$$U_n = \left((\frac{1}{3})^n I + 3\frac{1-(\frac{1}{3})^n}{2} N \right) \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} = (\frac{1}{3})^n \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} + 3\frac{1-(\frac{1}{3})^n}{2} \begin{pmatrix}1/6\\1/6\\1/6\\1/6\end{pmatrix} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{pmatrix}1/4\\1/4\\1/4\\1/4\end{pmatrix}$$

Donc toutes les probabilités tendent vers $\frac{1}{4}$.

3. (a) Voici les instructions pour simuler l'expérience :

```
n=input('Donner n: ')
M=[1/2 1/6 1/6 1/6;1/6 1/2 1/6 1/6;1/6 1/6 1/2 1/6;1/6 1/6 1/6 1/2]
X=grand(n,'markov',M',1)
disp(X)
```

(b) Voici le programme demandé :

```
M=[1/2 1/6 1/6 1/6;1/6 1/2 1/6 1/6;1/6 1/6 1/2 1/6;1/6 1/6 1/6 1/2]
p=zeros(1,1000)
for k=1:1000 do
    X=grand(10,'markov',M',1)
    p(k)=X(10)
end
disp(p)
```

(c) On obtient alors :

```
-->tabul(p,'i')
 ans  =
    1.    262.
    2.    264.
    3.    252.
    4.    222.
```

Donc les fréquences sont $0,262$ pour $(X_{10} = 1)$, 0.264 pour $(X_{10} = 2)$, 0.252 pour $(X_{10} = 3)$ et 0.222 pour $(X_{10} = 4)$.

Ce résultat est proche de la limite théorique des $P(X_n = 1)$, $P(X_n = 2)$, $P(X_n = 3)$, $P(X_n = 4)$ obtenue à la question 2.(d) qui vaut $\frac{1}{4} = 0.25$.