TP23

Chaînes de Markov

Une chaîne de Markov est une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que la loi conditionnelle de X_{n+1} sachant le passé, c'est-à-dire sachant $(X_k)_{0\leq k\leq n}$, est une fonction de X_n seulement. En d'autres termes, la prédiction du futur ne dépend que de l'état présent et non des états passés.

Exercice 1 Une urne contient 3 boules numérotées de 1 à 3. On effectue des tirages successifs avec remise et on définit une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de la façon suivante :

- Pour tout entier naturel n non nul, X_n est définie après le n-ième tirage.
- On procède au premier tirage et X_1 prend la valeur du numéro de la boule obtenue.
- Après le n-ième tirage ($n\in\mathbb{N}^*$) : Soit X_n a pris la valeur 1, dans ce cas on procède au $(n+1)$-ième tirage et X_{n+1} prend la valeur du numéro obtenu à ce $(n+1)$-ième tirage. Soit X_n a pris une valeur j différent de 1, dans ce cas on procède également au $(n+1)$-ième tirage et X_{n+1} prend la valeur j si la boule tirée porte le numéro j et la valeur 1 sinon.

1. Déterminer la loi de X_1.
2. Loi de X_n : On note U_n la matrice de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ dont le terme de la i-ième ligne est $P(X_n=i)$.
   (a) Déterminer les probabilités $P_{(X_n=j)}(X_{n+1}=i)$ pour tout couple $(i,j)\in\{1,2,3\}^2$. Justifier.
   (b) Déterminer la matrice $A\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $U_{n+1}=AU_n$.
   On dit que A est la **matrice de transition** associée à la chaîne de Markov.
   (c) Montrer qu'en posant $U_0=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, alors $\forall n\in\mathbb{N}$, $U_n=A^nU_0$.
   (d) Où lit-on dans A^n la loi de X_n ? On admet que la loi de X_n est donnée par :
   $$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ P(X_n=1)=\frac{1}{2}\left(1+\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right),\ P(X_n=2)=P(X_n=3)=\frac{1}{4}\left(1-\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right).$$
   (e) Simuler l'expérience aléatoire pour différentes valeurs de n.
   On utilisera l'instruction `grand(n, 'markov', A',X1)`, où A est la matrice de transition et X_1 est l'état initial.
3. Espérance de X_n :
   (a) Calculer l'espérance de X_n, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$. En déduire sa limite lorsque n tend vers $+\infty$.
   (b) Construire un programme Scilab qui simule n fois l'expérience aléatoire et calcule la moyenne des n valeurs X_n obtenues, où $n\in\mathbb{N}^*$ est donné par l'utilisateur.
   (c) Tester pour n "assez grand" et comparer avec le résultat obtenu à la question 3.(a).

Exercice 2 On considère, pour tout réels $a\in\mathbb{R}$ et $b\in\mathbb{R}^*$ les matrices M et N définies par :

$$M=\begin{pmatrix}a&b&b&b\\b&a&b&b\\b&b&a&b\\b&b&b&a\end{pmatrix}\quad\text{et}\quad N=\begin{pmatrix}b&b&b&b\\b&b&b&b\\b&b&b&b\\b&b&b&b\end{pmatrix}.$$

1. (a) Calculer N^2. Démontrer que, pour tout entier $k\geq 1$, il existe un réel u_k tel que $N^k=u_kN$.
   (b) Déterminer u_k puis N^k en fonction de k. Cette formule est-elle valable pour $k=0$?
   (c) Déterminer des réels x et y tels que $M=xN+yI$, où I désigne la matrice identité de taille 4.
   (d) En déduire pour tout entier $n\geq 1$, la valeur de M^n en fonction de I, de N et de n. On montrera que :
   $$M^n=(a-b)^nI+\frac{(a+3b)^n-(a-b)^n}{4b}N.$$

2. On considère un damier de 4 cases numérotées 1, 2, 3 et 4, sur lequel se déplace un pion.

   On note X_n le numéro de la case sur laquelle se trouve le jeton à l'instant n.

   On fait les hypothèses suivantes :

   - A l'instant 0, il se trouve sur la case 1.
   - Si à un instant n, il est sur une case, il se trouve encore sur cette case à l'instant $n+1$ avec une probabilité de $1/2$ et sinon, sur l'une des autres avec une probabilité de $1/6$ pour chacune.

   (a) Exprimer $P(X_{n+1} = 1)$, $P(X_{n+1} = 2)$, $P(X_{n+1} = 3)$ et $P(X_{n+1} = 4)$ en fonction de $P(X_n = 1)$, $P(X_n = 2)$, $P(X_n = 3)$ et $P(X_n = 4)$.

   On note pour tout entier naturel n, $U_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 1) \\ P(X_n = 2) \\ P(X_n = 3) \\ P(X_n = 4) \end{pmatrix}$.

   (b) Déterminer une matrice M telle que, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = MU_n$.

   On dit que M est la **matrice de transition** associée à la chaîne de Markov.

   (c) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n = M^n U_0$.

   (d) En déduire la limite quand n tend vers $+\infty$ des probabilités de $X_n = 1$, 2, 3 et 4.

3. (a) Simuler l'expérience aléatoire de la question 2 pour $n = 10$, 20, 50.

   On utilisera l'instruction `grand(n, 'markov' ,M' , X0 )`, où M est la matrice de transition et X_0 l'état initial. Notons que chaque état est ici représenté par Scilab par le numéro de la case où se trouve le pion.

   (b) Écrire un programme Scilab qui simule 1000 chaînes de Markov $(X_1, X_2, \ldots, X_{10})$, enregistre dans un vecteur p la liste des états X_{10} constatés à l'instant 10.

   (c) En utilisant l'instruction `tabul(p,'i')`, en déduire la fréquence de chacun des états à l'instant 10. Comparer le résultat obtenu avec celui de la question 2.(d).