Correction du TP24

Séries réelles

Exercice 1 1. Pour la série $A = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2n-1}{3^n}$,

$$\frac{2n-1}{3^n} = 2n\left(\frac{1}{3}\right)^n - \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{2}{3}n\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

Remarquons que :

- La série $\sum \frac{2}{3}n\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ converge car $n\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ est le terme général d'une série géométrique dérivée d'ordre 1 et de raison $\frac{1}{3} \in]-1,1[$.
- La série $\sum \left(\frac{1}{3}\right)^n$ converge car c'est une série géométrique de raison $\frac{1}{3} \in]-1,1[$.

Par somme, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2n-1}{3^n}$ converge et on a :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2n-1}{3^n} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{3}n\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{2}{3}\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n \\ &= \frac{2}{3}\frac{1}{(1-\frac{1}{3})^2} - \frac{1}{(1-\frac{1}{3})} = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} = 0.\end{aligned}$$

2. Pour la série $B = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+2^n}{n!}$,

$$\frac{n+2^n}{n!} = \frac{n}{n!} + \frac{2^n}{n!}.$$

Remarquons que :

- La série $\sum \frac{n}{n!}$ converge car $\frac{n}{n!} = \frac{1}{(n-1)!}$ est le terme général d'une série exponentielle.
- La série $\sum \frac{2^n}{n!}$ converge car c'est une série exponentielle.

Par somme, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+2^n}{n!}$ converge et on a :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+2^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^n}{n!} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^n}{n!} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n-1)!} + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^n}{n!} = e^1 + e^2.\end{aligned}$$

3. Pour la série $C = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2 2^n + (-1)^n}{2^{2n}}$,

$$\begin{aligned}\frac{n^2 2^n + (-1)^n}{2^{2n}} &= n^2\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{-1}{4}\right)^n = n(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^n + n\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{-1}{4}\right)^n \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 n(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} + \left(\frac{1}{2}\right) n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{-1}{4}\right)^n.\end{aligned}$$

Remarquons que :

- La série $\sum \left(\frac{1}{2}\right)^2 n(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$ converge car $n(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$ est le terme général d'une série géométrique dérivée d'ordre 2 et de raison $\frac{1}{2} \in]-1,1[$.
- La série $\sum \left(\frac{1}{2}\right) n \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ converge car $n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ est le terme général d'une série géométrique dérivée d'ordre 1 et de raison $\frac{1}{2} \in]-1,1[$.
- La série $\sum \left(\frac{-1}{4}\right)^n$ converge car c'est une série géométrique de raison $\frac{-1}{4} \in]-1,1[$.

Par somme, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2 2^n + (-1)^n}{2^{2n}}$ converge et on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2 2^n + (-1)^n}{2^{2n}} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^2 n(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} + \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right) n \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{-1}{4}\right)^n \\
&= \frac{1}{4}\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{-1}{4}\right)^n \\
&= \frac{1}{4}\frac{2}{(1-\frac{1}{2})^3} + \frac{1}{2}\frac{1}{(1-\frac{1}{2})^2} + \frac{1}{1+\frac{1}{4}} = 4 + 2 + \frac{4}{5} = \frac{34}{5}.
\end{aligned}$$

4. Pour la série $D = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n + n^2 + n}{n!}$,

$$\frac{3^n + n^2 + n}{n!} = \frac{3^n + n(n-1) + 2n}{n!} = \frac{3^n}{n!} + \frac{n(n-1)}{n!} + 2\frac{n}{n!}.$$

Remarquons que :

- La série $\sum \frac{3^n}{n!}$ converge car c'est une série exponentielle.
- La série $\sum \frac{n(n-1)}{n!}$ converge car $\frac{n(n-1)}{n!} = \frac{1}{(n-2)!}$ est le terme général d'une série exponentielle.
- La série $\sum 2\frac{n}{n!}$ converge car $\frac{n}{n!} = \frac{1}{(n-1)!}$ est le terme général d'une série exponentielle.

Par somme, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n + n^2 + n}{n!}$ converge et on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n + n^2 + n}{n!} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(n-1)}{n!} + 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n}{n!} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n(n-1)}{n!} + 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n}{n!} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n-2)!} + 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} + 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \\
&= e^3 + e^1 + 2e^1 = e^3 + 3e^1.
\end{aligned}$$

Exercice 2 1. (a) Notons $\mathcal{P}(n)$ la propriété "$u_n \in]0,1[$". Montrons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation : $u_0 = \frac{1}{2} \in]0,1[$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit n un entier naturel. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est aussi vérifiée.

Par hypothèse de récurrence, $u_n \in]0,1[$, donc $u_n^2 \in]0,1[$ et donc $1 - u_n^2 \in]0,1[$. On a alors :

$$u_{n+1} = u_n - u_n^3 = \underbrace{u_n}_{\in]0,1[} \underbrace{(1-u_n^2)}_{\in]0,1[} \in]0,1[.$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion : Par le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

(b) $u_{n+1} = u_n = (u_n - u_n^3) - u_n = -u_n^3 < 0$ car d'après la question précédente, $u_n \in]0, 1[$. Donc la suite (u_n) est décroissante.

(c) (u_n) est décroissante (question 1.(b)) et minorée par 0 (question 1.(a)) donc d'après le théorème des suites monotones, elle converge vers une limite $\ell \in [0, 1]$ (car pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]0, 1[$). Si on passe à la limite lorsque n tend vers $+\infty$ dans la relation $u_{n+1} = u_n - u_n^3$, on obtient :

$$\ell = \ell - \ell^3 \Leftrightarrow \ell - \ell + \ell^3 = 0 \Leftrightarrow \ell^3 = 0 \Leftrightarrow \ell = 0.$$

Ainsi, la suite (u_n) converge vers 0.

2. Comme $u_{n+1} = u_n - u_n^3$, on a $u_n^3 = u_n - u_{n+1}$.

Alors, en considérant la somme partielle S_n de la série $\sum_{n\geq 0} u_n^3$:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k^3 = \sum_{k=0}^{n} (u_k - u_{k+1}) = (u_0 - u_1) + (u_1 - u_2) + \ldots + (u_n - u_{n+1}) = u_0 - u_{n+1}$$

par télescopage. Comme $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ (question 1.(c)), on a donc $\lim_{n\to+\infty} S_n = u_0 = \frac{1}{2}$.

Ainsi, la série $\sum_{n\geq 0} u_n^3$ est convergente et sa somme vaut $\frac{1}{2}$.

3. (a) En considérant la somme partielle V_n de la série $\sum_{n\geq 0} v_n$, on a :

$$V_n = \sum_{k=0}^{n} v_k = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{u_{k+1}} - \frac{1}{u_k}\right) = \left(\frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_0}\right) + \left(\frac{1}{u_2} - \frac{1}{u_1}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}\right) = \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_0}$$

par télescopage. Comme $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ (question 1.(c)), $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{u_{n+1}} = +\infty$. Donc $\lim_{n\to+\infty} V_n = +\infty$.

Ainsi, la série $\sum_{n\geq 0} v_n$ est divergente.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$v_n = \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = \frac{u_n - u_{n+1}}{u_{n+1}u_n} = \frac{u_n - (u_n - u_n^3)}{(u_n - u_n^3)u_n} = \frac{u_n^3}{(1 - u_n^2)u_n^2} = \frac{u_n}{1 - u_n^2}.$$

(c) La suite (u_n) est décroissante (question 1.(b)), de premier terme $u_0 = \frac{1}{2}$ et elle converge vers 0 (question 1.(c)). Donc :

$$0 \leq u_n \leq \frac{1}{2} \Rightarrow 0 \leq u_n^2 \leq \frac{1}{4} \Rightarrow -\frac{1}{4} \leq -u_n^2 \leq 0 \Rightarrow \frac{3}{4} \leq 1 - u_n^2 \leq 1 \Rightarrow 1 \leq \frac{1}{1 - u_n^2} \leq \frac{4}{3}.$$

En multipliant cette dernière inégalité par u_n (qui est > 0), on obtient :

$$u_n \leq \frac{u_n}{1 - u_n^2} \leq \frac{4}{3}u_n \quad \text{donc avec la question précédente} \quad u_n \leq v_n \leq \frac{4}{3}u_n.$$

En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq v_n \leq \frac{4}{3}u_n$.

(d) On a $0 \leq v_n \leq \frac{4}{3}u_n$ avec la question précédente. De plus, la série $\sum_{n\geq 0} v_n$ est divergente. Par comparaison de séries à termes positifs, on en déduit que la série de terme générale $\frac{4}{3}u_n$ est divergente. Donc la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est divergente.

Exercice 3 1. Pour la série $A = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{ne^{\frac{1}{n}}+1}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$:

$$\lim_{n\to+\infty} ne^{\frac{1}{n}}+1 = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = 0^+.$$

Donc, par quotient, $\lim_{n\to+\infty} \frac{ne^{\frac{1}{n}}+1}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = +\infty$. Le terme générale ne tend pas vers 0, donc la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{ne^{\frac{1}{n}}+1}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$ diverge grossièrement.

2. Pour la série $B = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1}$:

   Le terme générale tend vers 0 et est de signe non constant. On a, pour tout $n \geq 1$,

$$0 \leq \left|\frac{(-1)^n}{n^2+1}\right| = \frac{1}{n^2+1} \leq \frac{1}{n^2},$$

   et $\frac{1}{n^2}$ est le terme général d'une série de Riemann de paramètre $2 > 1$ donc convergente.

   Par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n^2+1}\right|$ converge.

   Donc la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1}$ converge absolument, donc elle converge.

3. Pour la série $C = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3+(-1)^n}{n^3}$,

$$0 \leq \frac{3+(-1)^n}{n^3} \leq \frac{4}{n^3}.$$

   Or $\sum \frac{4}{n^3}$ converge car $\frac{1}{n^3}$ est le terme général d'une série de Riemann de paramètre $3 > 1$ donc convergente.

   Par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3+(-1)^n}{n^3}$ converge.

4. Pour la série $D = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+\ln(n)}$: On commence par montrer que pour tout $x > 0$, $\ln(x) \leq x$ (il faut considérer la fonction $f(x) = \ln(x) - x$ et étudier ses variations). On a alors :

$$\frac{\sqrt{n}}{n+\ln(n)} \geq \frac{\sqrt{n}}{n+n} = \frac{\sqrt{n}}{2n} = \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

   Or $\sum_{n\geq1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ est une série de Riemann de paramètre $\frac{1}{2} \leq 1$ donc divergente.

   Par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+\ln(n)}$ diverge vers $+\infty$.