Correction du TP25

Calcul intégral

Exercice 1

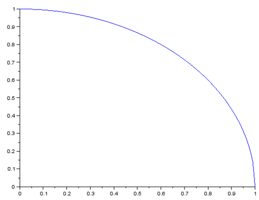
1. Voici les instructions à entrer dans l'éditeur pour définir la fonction f sur Scilab :

```
function y=f(x)
    y=sqrt(1-x^2)
endfunction
```

Pour tracer la fonction sur Scilab, on ajoute les instructions suivantes (dans l'éditeur ou la console) :

```
-->x=0:0.01:1;
-->plot(x,f)
```

On obtient la figure suivante :



2. Si $a = 0$ et $b = 1$, alors $I_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)$. Voici la fonction `SommedeRiemann1` pour calculer I_n :

```
function I=SommedeRiemann1(n)
    I=0
    for i=1:n do
        I=I+f(i/n)
    end
    I=I/n
endfunction
```

3. On teste pour $n = 100$ et $n = 1000$:

```
-->SommedeRiemann1(100)
 ans  =
    0.7801043
-->SommedeRiemann1(1000)
 ans  =
    0.7848889
```

On remarque que plus n est grand, plus la valeur de I_n est proche de $\frac{\pi}{4} \simeq 0.7853981$.

4. Voici la fonction `vitesse` pour obtenir le plus petit entier naturel n tel que $\left|I_n - \frac{\pi}{4}\right| < 10^{-3}$:

```
function n=vitesse()
    n=1
    while abs(SommedeRiemann1(n)-%pi/4)>=10^-3 do
        n=n+1
    end
endfunction
```

On teste dans le console :

```
-->vitesse()
 ans  =
    513.
```

Exercice 2

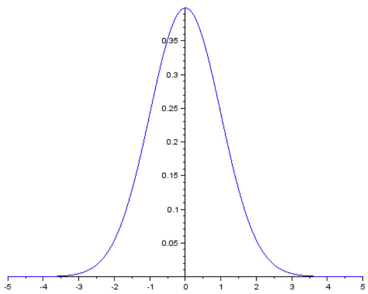
1. Voici les instructions à entrer dans l'éditeur pour définir la fonction g sur Scilab :

```
function y=g(x)
    y=(1/sqrt(2*%pi))*exp(-(x^2)/2)
endfunction
```

Pour tracer la fonction sur Scilab, on ajoute les instructions suivantes (dans l'éditeur ou la console) :

```
-->x=-5:0.01:5;
-->plot(x,g)
```

On obtient la figure suivante :



2. Voici la procédure pour calculer I_n:

```
function I=SommedeRiemann2(n,a,b)
    I=0
    for i=1:n do
        I=I+g(a+i*(b-a)/n)
    end
    I=I*(b-a)/n
endfunction
```

3. On teste pour différentes valeurs de a, b et n :

```
-->SommedeRiemann2(100,-2,2)
 ans  =
    0.9544709
-->SommedeRiemann2(100,-5,5)
 ans  =
    0.9999994
```

On remarque que plus a est petit et b est grand, et plus I_{100} est proche de 1. On peut conjecturer que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 1$$

Exercice 3

- $A = \displaystyle\int_2^3 (x^2+x+1)dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x\right]_2^3 = \left(9 + \frac{9}{2} + 3\right) - \left(\frac{8}{3} + 2 + 2\right) = \frac{59}{6}.$

- $B = \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{(2x+1)^2} dx = \frac{1}{2}\int_1^2 2(2x+1)^{-2} dx = \frac{1}{2}\left[\frac{(2x+1)^{-1}}{-1}\right]_1^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{5} + \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{15}.$

- $C = \displaystyle\int_{1/e^3}^{1/e^2} \frac{dx}{x\ln(x)} = \int_{e^{-3}}^{e^{-2}} \frac{1}{x}(\ln(x))^{-1} dx = [\ln(|\ln(x)|)]_{e^{-3}}^{e^{-2}} = \ln(2) - \ln(3) = \ln(2/3).$

- Pour D, on effectue une intégration par parties ($x \mapsto \ln(x)$ et $x \mapsto \dfrac{x^2}{2}$ sont de classe C^1 sur $[1, e]$) :

$$\begin{array}{c|ccc} + & \ln(x) & & x \\ & & \searrow & \\ - & \dfrac{1}{x} & \longrightarrow & \dfrac{x^2}{2} \end{array}$$

On obtient :

$$\begin{aligned}\int_1^e x\ln(x)dx &= \left[\ln(x)\times\frac{x^2}{2}\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2}\times\frac{1}{x}dx = \frac{e^2}{2}-\frac{1}{2}\int_1^e xdx = \frac{e^2}{2}-\frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^e\\ &= \frac{e^2}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{e^2}{2}-\frac{1}{2}\right) = \frac{e^2+1}{4}.\end{aligned}$$

- Pour E, on effectue trois intégrations par parties ($x\mapsto x^2$ et $x\mapsto \frac{1}{8}e^{2x}$ sont de classe C^3 sur $[-1,1]$) :

$$\begin{array}{c|ccc} + & x^2 & & e^{2x} \\ & & \searrow & \\ - & 2x & & \frac{1}{2}e^{2x} \\ & & \searrow & \\ + & 2 & & \frac{1}{4}e^{2x} \\ & & \searrow & \\ - & 0 & \longrightarrow & \frac{1}{8}e^{2x}\end{array}$$

On obtient :

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 x^2e^{2x}dx &= \left[x^2\times\frac{1}{2}e^{2x}\right]_{-1}^1 - \left[2x\times\frac{1}{4}e^{2x}\right]_{-1}^1 + \left[2\times\frac{1}{8}e^{2x}\right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 0\times\frac{1}{8}e^{2x}dx\\ &= \left(\frac{e^2}{2}-\frac{e^{-2}}{2}\right) - \left(\frac{e^2}{2}+\frac{e^{-2}}{2}\right) + \left(\frac{e^2}{4}-\frac{e^{-2}}{4}\right) - 0\\ &= \frac{e^2-5e^{-2}}{4}\end{aligned}$$

- Pour F, on effectue une intégration par parties ($x\mapsto(\ln(x))^2$ et $x\mapsto x$ sont de classe C^1 sur $[1,e]$) :

$$\begin{array}{c|ccc} + & (\ln(x))^2 & & 1 \\ & & \searrow & \\ - & 2\times\frac{1}{x}\times\ln(x) & \longrightarrow & x\end{array}$$

On obtient :

$$F = \int_1^e(\ln(x))^2dx = \left[x(\ln(x))^2\right]_1^e - \int_1^e 2\ln(x)dx = e-2\int_1^e\ln(x)dx.$$

On effectue une nouvelle intégration par partie ($x\mapsto x$ et $x\mapsto\ln(x)$ sont C^1 sur $[1,e]$) :

$$\begin{array}{c|ccc} + & \ln(x) & & 1 \\ & & \searrow & \\ - & \frac{1}{x} & \longrightarrow & x\end{array}$$

On obtient :

$$F = e-2\left([x\ln(x)]_1^e - \int_1^e 1dx\right) = e-2\left(e-[x]_1^e\right) = e-2.$$