TP25

Calcul intégral

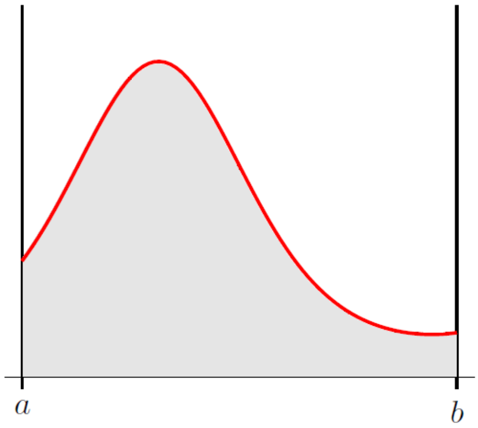
1 Sommes de Riemann

Dans cette section, on considère une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue et on cherche à obtenir un calcul approché de l'intégrale :

$$\int_a^b f(t)dt$$

Rappelons que, par définition, $\int_a^b f(t)dt$ désigne l'aire algébrique sous la courbe $\mathcal{C}_f$: elle est comptée positivement lorsque f est positive et négativement lorsque f est négative.

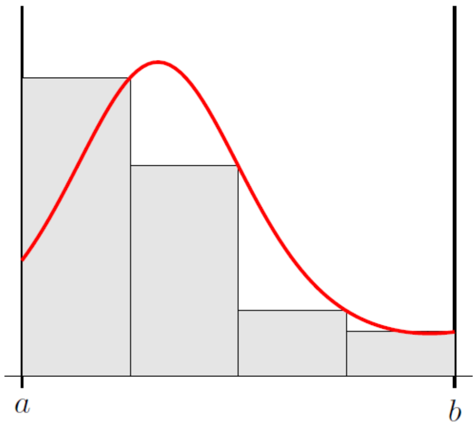
L'idée est ici d'approcher cette aire sous la courbe par l'aire de figures géométriques simples, des rectangles.



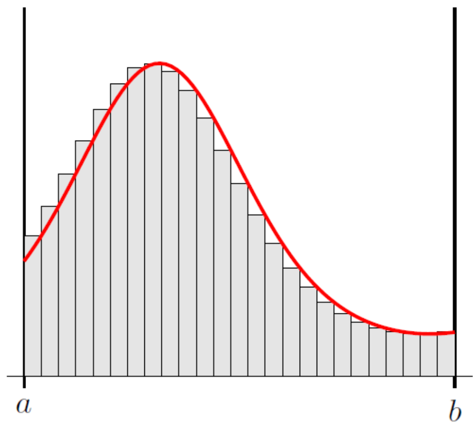
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On approche la valeur de $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ par la valeur I_n suivante :

$$I_n = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right)$$

On peut représenter cette somme pour différentes valeurs de n :



Découpage avec $n = 4$



Découpage avec $n = 25$

La somme I_n est appelée la **n-ième somme de Riemann**. Elle fournit une approximation de l'aire algébrique sous la courbe $\mathcal{C}_f$ entre a et b et permet de définir de manière rigoureuse la notion d'intégrale :

$$\boxed{\int_a^b f(t)dt = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right)}$$

On parle de l'intégrale (au sens) de Riemann de la fonction f entre a et b.

Cas particulier. Si f est une fonction continue sur $[0,1]$, alors $a = 0$, $b = 1$ et on obtient la formule suivante :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x)dx.$$

Exemple. Déterminer la limite des suites suivantes :

- $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(n+k) - \ln(n)}{n}$

- $v_n = \displaystyle\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{\sqrt{4n^2 - k^2}}$

- $w_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2 + k^2}$

- $x_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2kn}}$

Exercice 1 On considère la fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$.

1. Définir la fonction f sur Scilab puis la tracer sur l'intervalle $[0,1]$.
2. Construire une fonction `SommedeRiemann1` qui, étant donné un entier $n \in \mathbb{N}^*$, retourne la n-ième somme de Riemann I_n associée à f sur l'intervalle $[0,1]$.
3. En testant avec différentes valeurs de n, constater que : $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = \dfrac{\pi}{4}$.
4. Construire une fonction `vitesse` qui permet de calculer et d'afficher le plus petit entier naturel n tel que $\left| I_n - \dfrac{\pi}{4} \right| < 10^{-3}$. On fera appelle à la fonction `SommedeRiemann1`.

Exercice 2 On considère la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$.

1. Définir la fonction g sur Scilab puis la tracer sur l'intervalle $[0, 1]$.
2. Construire une fonction `SommedeRiemann2` qui, étant donné un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et deux nombres réels a et b, retourne la n-ième somme de Riemann I_n associée à g sur l'intervalle $[a, b]$.
3. En testant avec différentes valeurs de n, de a et de b, conjecturer la valeur de l'intégrale suivante :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx$$

La fonction $g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$ *est la densité de probabilité de la loi normale centrée réduite.*

2 Calcul d'intégrales

Pour calculer une intégrale avec Scilab, on utilise la commande suivante :

```
-->integrate('expression','x',a,b)
```

où :

- `'expression'` est l'expression de la fonction à intégrer qu'il faut mettre entre guillemets,
- `'x'` est la variable d'intégration qu'il faut aussi mettre entre guillemets,
- `a` et `b` sont les bornes de l'intervalle sur lequel on intègre.

Par exemple, pour calculer $\int_0^1 e^x dx$, on entre l'instruction suivante dans la console :

```
-->integrate('exp(x)','x',0,1)
 ans  =
    1.718281828459
```

Exercice 3 Calculer les intégrales suivantes à la main puis vérifier vos résultats avec Scilab :

$$A = \int_2^3 (x^2 + x + 1) dx \qquad B = \int_1^2 \frac{1}{(2x+1)^2} dx \qquad C = \int_{1/e^3}^{1/e^2} \frac{dx}{x \ln(x)}$$

$$D = \int_1^e x \ln(x) dx \qquad E = \int_{-1}^1 x^2 e^{2x} dx \qquad F = \int_1^e (\ln(x))^2 dx$$