Correction du TP26

Calcul intégral

Exercice 1 1. $I_0 = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{1+x^2}dx = \left[\ln(1+x^2)\right]_0^1 = \frac{\ln(2)}{2}$.

2. (a) On a :

$$\begin{aligned} I_0 + I_1 &= \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx + \int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2}dx = \int_0^1 \frac{x+x^3}{1+x^2}dx = \int_0^1 x\frac{1+x^2}{1+x^2}dx \\ &= \int_0^1 x dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

(b) Des questions précédentes, on a donc : $I_1 = \frac{1}{2} - \frac{\ln(2)}{2} = \frac{1-\ln(2)}{2}$.

3. (a) Pour $x \in [0,1]$, on a : $\frac{x^{2n+1}}{1+x^2} \geq 0$. En intégrant pour x allant de 0 à 1 (bornes croissantes), on obtient :

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{1+x^2}dx \geq 0.$$

(b) On a :

$$\begin{aligned} I_{n+1} + I_n &= \int_0^1 \frac{x^{2n+3}}{1+x^2}dx + \int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{1+x^2}dx = \int_0^1 \frac{x^{2n+3}+x^{2n+1}}{1+x^2}dx \\ &= \int_0^1 x^{2n+1}\frac{1+x^2}{1+x^2}dx = \int_0^1 x^{2n+1}dx = \left[\frac{x^{2n+2}}{2n+2}\right]_0^1 = \frac{1}{2n+2}. \end{aligned}$$

(c) Avec les deux questions précédentes, on a : $\frac{1}{2n+2} - I_n = I_{n+1} \geq 0$. Ainsi $I_n \leq \frac{1}{2n+2}$.

(d) Des questions précédentes, on obtient l'encadrement : $0 \leq I_n \leq \frac{1}{2n+2}$.

Or : $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n+2} = 0$. Donc, par le théorème d'encadrement, $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.

4. (a) Notons $\mathcal{P}(n)$ la propriété : "$2(-1)^{n-1}I_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} - \ln(2)$". Montrons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

<u>Initialisation</u> : D'une part, $2(-1)^{1-1}I_1 = 2I_1 = 1 - \ln(2)$ d'après la question 2.(b).
D'autre part, $\sum_{k=1}^{1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} - \ln(2) = \frac{(-1)^{1-1}}{1} - \ln(2) = 1 - \ln(2)$. Ainsi $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

<u>Hérédité</u> : Soit n un entier naturel non nul. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Montrons alors que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
D'après la question 3.(b), $I_{n+1} = \frac{1}{2n+2} - I_n$. Donc :

$$2(-1)^n I_{n+1} = 2(-1)^n\left(\frac{1}{2n+2} - I_n\right) = \frac{(-1)^n}{n+1} + 2(-1)^{n-1}I_n.$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence, on obtient :

$$2(-1)^n I_{n+1} = \frac{(-1)^n}{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} - \ln(2) = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} - \ln(2).$$

Donc la propriété $\mathcal{P}(n+1)$ est donc vraie.

Conclusion : Par récurrence, pour tout entier naturel n non nul,

$$2(-1)^{n-1}I_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} - \ln(2).$$

(b) On a : $|2(-1)^{n-1}I_n| = 2I_n$. Or, d'après la question 3.(d), $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 2(-1)^{n-1}I_n = 0$.

Avec la question précédente, on obtient alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln(2)$.

Autrement dit, la série $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$ converge et sa somme vaut $\ln(2)$.

5. (a) On a :

$$\begin{array}{c|ccc} + & \dfrac{1}{1+x^2} & & x^{2n+1} \\ & & \searrow & \\ - & \dfrac{-2x}{(1+x^2)^2} & \longrightarrow & \dfrac{x^{2n+2}}{2n+2} \end{array}$$

Les fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ et $x \mapsto \dfrac{x^{2n+2}}{2n+2}$ sont de classe C^1 sur $[0,1]$. Par intégration par parties :

$$\begin{aligned} I_n &= \left[\frac{x^{2n+2}}{2n+2} \times \frac{1}{1+x^2}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{2n+2} \frac{-2x}{(1+x^2)^2} dx \\ &= \frac{1}{2n+2} \times \frac{1}{2} - 0 + \frac{2}{2n+2} \int_0^1 \frac{x^{2n+3}}{(1+x^2)^2} dx \\ &= \frac{1}{4(n+1)} + \frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{2n+3}}{(1+x^2)^2} dx. \end{aligned}$$

(b) Pour $x \in [0,1]$, $1+x^2 \geq 1$ d'où $(1+x)^2 \geq 1$ (par croissance de la fonction carré sur $\mathbb{R}^+$), d'où $\dfrac{1}{(1+x^2)^2} \leq 1$ (la fonction inverse étant décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$) et donc $0 \leq \dfrac{x^{2n+3}}{(1+x^2)^2} \leq x^{2n+3}$ (en multipliant par $x^{2n+3} \geq 0$).

En intégrant ces inégalités pour x allant de 0 à 1 (bornes croissantes), il vient :

$$0 \leq \int_0^1 \frac{x^{2n+3}}{(1+x^2)^2} dx \leq \int_0^1 x^{2n+3} dx$$

Or $\displaystyle\int_0^1 x^{2n+3} dx = \left[\frac{x^{2n+4}}{2n+4}\right]_0^1 = \frac{1}{2n+4}$. On a donc bien : $0 \leq \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{2n+3}}{(1+x^2)^2} dx \leq \frac{1}{2n+4}$.

(c) D'après l'égalité établie à la question 5.(a), on a :

$$nI_n = \frac{n}{n+1} \times \frac{1}{4} + \frac{n}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{2n+3}}{(1+x^2)^2} dx$$

Or :

- $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{n+1} \times \dfrac{1}{4} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{1+1/n} \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{4}$.
- D'après la question 5.(b), $0 \leq \dfrac{n}{n+1} \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{2n+3}}{(1+x^2)^2} dx \leq \frac{n}{(n+1)(2n+4)}$.

  Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{(n+1)(2n+4)} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{(1+1/n)(2n+4)} = 0$, on en déduit par le théorème d'encadrement que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{n+1} \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{2n+3}}{(1+x^2)^2} dx = 0$.

On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n = \dfrac{1}{4}$.

Exercice 2 1. (a) f est définie, continue et dérivable sur $]1,+\infty[$ et on a :

$$f'(x) = (-1)\times(1\times\ln(x) + x\times\frac{1}{x})\times(x\ln(x))^{-2} = -\frac{\ln(x)+1}{(x\ln(x))^2}.$$

Pour tout $x\in]1,+\infty[$, $f'(x)\leq 0$. On obtient donc le tableau de variation suivant :

x	1	$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$-$
$f(x)$	$\|\|$ $+\infty$	$\searrow$ 0

Pour la limite en 1^+ : $\lim\limits_{x\to 1^+} x\ln(x) = 0^+$ donc $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$.
Pour la limite en $+\infty$: $\lim\limits_{x\to +\infty} x\ln(x) = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0$.

(b) Soit un entier $k\geq 2$. Comme f est décroissante sur $]1,+\infty[$,

$$k\leq x\leq k+1 \Rightarrow f(k)\geq f(x)\geq f(k+1).$$

En intégrant ces inégalités pour x allant de k à $k+1$ (bornes croissantes), on obtient :

$$\int_k^{k+1} f(k)dx \geq \int_k^{k+1} f(x)dx \geq \int_k^{k+1} f(k+1)dx.$$

Or $\displaystyle\int_k^{k+1} f(k)dx = f(k)\int_k^{k+1} 1dx = f(k)\,[x]_k^{k+1} = f(k)(k+1-k) = f(k)$.

De la même façon, $\displaystyle\int_k^{k+1} f(k+1)dx = f(k+1)$.

Finalement, on a bien obtenu : $f(k+1)\leq \displaystyle\int_k^{k+1} f(x)dx \leq f(k)$.

(c) Soit $k\geq 2$. Alors :

$$\int_k^{k+1} f(x)dx = \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\times(\ln(x))^{-1}dx = [\ln(\ln(x))]_k^{k+1} = \ln(\ln(k+1)) - \ln(\ln(k)).$$

2. (a) Soit $n\geq 3$. On somme les inégalités de la question 1.(b) pour k allant de 2 à $n-1$:

$$\sum_{k=2}^{n-1} f(k+1) \leq \sum_{k=2}^{n-1}\int_k^{k+1} f(x)dx \leq f(k) \leq \sum_{k=2}^{n-1} f(k).$$

Or :

- $\displaystyle\sum_{k=2}^{n-1} f(k+1) = \sum_{k=3}^{n} f(k) = \sum_{k=2}^{n} f(k) - f(2) = S_n - \frac{1}{2\ln(2)}$.
- $\displaystyle\sum_{k=2}^{n-1}\int_k^{k+1} f(x)dx = \sum_{k=2}^{n-1}(\ln(\ln(k+1)) - \ln(\ln(k))) = \ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2))$ par télescopage.
- $\displaystyle\sum_{k=2}^{n-1} f(k) = \sum_{k=2}^{n} f(k) - f(n) = S_n - \frac{1}{n\ln(n)}$.

On a ainsi démontré que, pour tout $n\geq 3$, $S_n - \dfrac{1}{2\ln(2)} \leq \ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2)) \leq S_n - \dfrac{1}{n\ln(n)}$.
Cette formule est encore valable pour $n=2$.

(b) On déduit de la première inégalité que : $S_n \leq \ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2)) + \dfrac{1}{2\ln(2)}$.

On déduit de la deuxième inégalité que : $\ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2)) + \dfrac{1}{n\ln(n)} \leq S_n$.

On a donc : $\ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2)) + \dfrac{1}{n\ln(n)} \leq S_n \leq \ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2)) + \dfrac{1}{2\ln(2)}$.

(c) On a vu que, pour tout $n \geq 2$, $S_n \geq \ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2)) + \dfrac{1}{n\ln(n)}$.

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2)) + \dfrac{1}{n\ln(n)}\right) = +\infty$. Donc, par passage à la limite dans une inégalité, $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$.

Ainsi, la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\geq 2}$ de la série $\sum\limits_{n\geq 2} \dfrac{1}{n\ln(n)}$ diverge vers $+\infty$. Donc la série $\sum\limits_{n\geq 2} \dfrac{1}{n\ln(n)}$ diverge.

3. (a) Montrons que $(u_n)_{n\geq 2}$ et $(v_n)_{n\geq 2}$ sont adjacentes.

- Croissance de $(u_n)_{n\geq 2}$:

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= (S_{n+1} - \ln(\ln(n+2))) - (S_n - \ln(\ln(n+1))) \\ &= S_n + \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} - \ln(\ln(n+2)) - S_n + \ln(\ln(n+1)) \\ &= \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} - (\ln(\ln(n+2)) - \ln(\ln(n+1))) \\ &= f(n+1) - \int_{n+1}^{n+2} f(x)dx \geq 0, \end{aligned}$$

d'après la deuxième inégalité de la question 1.(b) avec $k = n+1$ et la question 1.(c).

- Décroissance de $(v_n)_{n\geq 2}$:

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= (S_{n+1} - \ln(\ln(n+1))) - (S_n - \ln(\ln(n))) \\ &= S_n + \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} - \ln(\ln(n+1)) - S_n + \ln(\ln(n)) \\ &= \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} - (\ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(n))) \\ &= f(n+1) - \int_{n}^{n+1} f(x)dx \leq 0, \end{aligned}$$

d'après la première inégalité de la question 1.(b) avec $k = n$ et la question 1.(c).

- $\lim\limits_{n\to+\infty} (v_n - u_n)$:

$$\begin{aligned} v_n - u_n &= (S_n - \ln(\ln(n))) - (S_n - \ln(\ln(n+1))) = \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(n)) \\ &= \ln\left(\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)}\right) = \ln\left(\frac{\ln(n) + \ln(1+1/n)}{\ln(n)}\right) = \ln\left(1 + \frac{\ln(1+1/n)}{\ln(n)}\right) \\ &\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0, \end{aligned}$$

par continuité de la fonction logarithme en 0.

Les suites $(u_n)_{n\geq 2}$ et $(v_n)_{n\geq 2}$ sont donc adjacentes et elles convergent donc vers une même limite ℓ.

(b) D'après la question précédente, comme $(u_n)_{n\geq 2}$ croissante et $(v_n)_{n\geq 2}$ décroissante, on en déduit que pour tout $n \geq 2$: $u_n \leq \ell \leq v_n$.
En soustrayant les inégalités $u_n \leq \ell \leq v_n$ par v_n, on obtient : $u_n - v_n \leq \ell - v_n \leq 0$.
En multipliant par $-1 < 0$, on obtient : $0 \leq v_n - \ell \leq v_n - u_n$.
Or, on a vu à la question précédente que $v_n - u_n = \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(n))$. Alors, avec les questions 1.(b) et (c) :

$$v_n - u_n = \int_n^{n+1} f(x)dx \leq f(n) = \frac{1}{n\ln(n)}.$$

On a donc bien, pour tout $n \geq 2$, $0 \leq v_n - \ell \leq \dfrac{1}{n\ln(n)}$.

(c) Voici le programme pour obtenir ℓ à 10^{-5} près :

```
n=2
S=1/(2*log(2))
while (1/(n*log(n)))>10^(-5) do
    n=n+1
    S=S+1/(n*log(n))
end
v=S-log(log(n))
disp(v)
```