TP26

Calcul intégral

Exercice 1 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{1+x^2}dx$.

1. Calculer I_0.
2. (a) Calculer $I_0 + I_1$.
   (b) En déduire I_1.
3. (a) Quel est le signe de I_n ?
   (b) Montrer que : $I_{n+1} + I_n = \dfrac{1}{2n+2}$.
   (c) En déduire que : $I_n \leq \dfrac{1}{2n+2}$.
   (d) Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et calculer sa limite.
4. (a) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel non nul n :
$$2(-1)^{n-1}I_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} - \ln(2).$$
   (b) En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ converge et déterminer sa somme.
5. (a) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que :
$$I_n = \frac{1}{4(n+1)} + \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{2n+3}}{(1+x^2)^2}dx.$$
   (b) Établir les inégalités : $0 \leq \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{2n+3}}{(1+x^2)^2}dx \leq \frac{1}{2n+4}$.
   (c) En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} nI_n$.

Exercice 2 On note $f :]1, +\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{1}{x\ln(x)}$.

1. (a) Étudier les variations de f. On précisera les limites de f en 1 et en $+\infty$.
   (b) Montrer que, pour tout entier $k \geq 2$:
$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x)dx \leq f(k).$$
   (c) Calculer, pour tout entier $k \geq 2$, $\displaystyle\int_k^{k+1} f(x)dx$
2. Pour tout entier $n \geq 2$, on note : $S_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} f(k) = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)}$.
   (a) Montrer que, pour tout entier $n \geq 2$, on a :
$$S_n - \frac{1}{2\ln(2)} \leq \ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2)) \leq S_n - \frac{1}{n\ln(n)}.$$
   (b) En déduire un encadrement de S_n pour tout $n \geq 2$.

(c) En déduire nature de la série $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n\ln(n)}$.

3. Pour tout entier $n \geq 2$, on pose :

$$u_n = S_n - \ln(\ln(n+1)) \quad \text{et} \quad v_n = S_n - \ln(\ln(n)).$$

(a) Montrer que les suites $(u_n)_{n\geq 2}$ et $(v_n)_{n\geq 2}$ sont adjacentes.
On note ℓ leur limite commune.

(b) Montrer que, pour tout entier $n \geq 2$, on a : $0 \leq v_n - \ell \leq \frac{1}{n\ln(n)}$.

(c) Compléter le programme suivant pour obtenir une valeur approchée de ℓ à 10^{-5} près :

```
n=2
S=***
while *** do
    n=***
    S=***
end
v=***
disp(v)
```