TP27

Simulations de variables aléatoires discrètes

Rappels.

- L'instruction `rand()` renvoie un nombre réel au hasard dans le segment $]0,1[$.
- Si x est un nombre réel, l'instruction `floor(x)` retourne la partie entière de x.

1 Lois discrètes usuelles

1.1 Loi uniforme

1. Soit X une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$. Donner $X(\Omega)$, $P(X=k)$ pour tout $k \in X(\Omega)$, $E(X)$ et $V(X)$.

2. Proposer un exemple d'expérience aléatoire faisant intervenir une variable aléatoire qui suit une loi uniforme.

3. Écrire une fonction `loiuniforme` utilisant les instructions `rand` et `floor` qui, étant donné $n \in \mathbb{N}^*$, permet de simuler et d'obtenir la valeur d'une variable aléatoire X suivant une loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$.

4. La fonction `grand(m,n,'uin',a,b)` simule une matrice $m \times n$ dont chaque coefficient suit une loi uniforme sur $[\![a,b]\!]$.

   (a) En utilisant la fonction `grand`, créer un vecteur ligne $U = (U_1, U_2, \ldots, U_{10000})$ contenant un échantillon de 10000 simulations de la loi uniforme sur $[\![1,10]\!]$.
   Afficher les 100 premières valeurs et vérifier que les valeurs obtenues sont cohérentes.

   (b) Entrer dans la console les instructions suivantes :
   ```
   -->M=tabul(U,"i")
   -->x=M(:,1)
   -->f=M(:,2)/10000
   -->bar(x,f)
   ```
   Interpréter le résultat obtenu.

1.2 Loi de Bernoulli

1. Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre p. Donner $X(\Omega)$, $P(X=k)$ pour tout $k \in X(\Omega)$, $E(X)$ et $V(X)$.

2. Proposer un exemple d'expérience aléatoire faisant intervenir une variable aléatoire qui suit une loi de Bernoulli.

3. Écrire une fonction `loibernoulli` utilisant l'instruction `rand` qui, étant donné $p \in]0,1[$, permet de simuler et d'obtenir la valeur d'une variable aléatoire X suivant une loi de Bernoulli de paramètre p.

4. La fonction `grand(m,n,'bin',1,p)` simule une matrice $m \times n$ dont chaque coefficient suit une loi de Bernoulli de paramètre p.
   Créer un vecteur ligne $U = (U_1, U_2, \ldots, U_{10000})$ contenant un échantillon de 10000 simulations de la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{3}$ puis tracer le diagramme en bâton des fréquences obtenues.

1.3 Loi binomiale

1. Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres N et p. Donner $X(\Omega)$, $P(X=k)$ pour tout $k \in X(\Omega)$, $E(X)$ et $V(X)$.

2. Proposer un exemple d'expérience aléatoire faisant intervenir une variable aléatoire qui suit une loi binomiale.

3. Écrire une fonction `loibinomiale` qui, étant donné $N \in \mathbb{N}$ et $p \in]0,1[$, permet de simuler et d'obtenir la valeur d'une variable aléatoire X suivant une loi binomiale de paramètres N et p. Cette fonction utilisera la fonction `loibernoulli`.

4. La fonction `grand(m,n,'bin',N,p)` simule une matrice $m \times n$ dont chaque coefficient suit une loi binomiale de paramètres N et p.

   Créer un vecteur ligne $U = (U_1, U_2, \ldots, U_{10000})$ contenant un échantillon de 10000 simulations de la loi binomiale de paramètres 10 et $\dfrac{1}{3}$ puis tracer le diagramme en bâton des fréquences obtenues.

1.4 Loi géométrique

1. Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre p. Donner $X(\Omega)$, $P(X = k)$ pour tout $k \in X(\Omega)$, $E(X)$ et $V(X)$.
2. Proposer un exemple d'expérience aléatoire faisant intervenir une variable aléatoire qui suit une loi géométrique.
3. Écrire une fonction `loigeometrique` qui, étant donné $p \in]0,1[$, permet de simuler et d'obtenir la valeur d'une variable aléatoire X suivant une loi géométrique de paramètre p. Cette fonction utilisera la fonction `loibernoulli`.
4. La fonction `grand(m,n,'geom',p)` simule une matrice $m \times n$ dont chaque coefficient suit une loi géométrique de paramètre p.

   Créer un vecteur ligne $U = (U_1, U_2, \ldots, U_{10000})$ contenant un échantillon de 10000 simulations de la loi géométrique de paramètre $\dfrac{1}{3}$ puis tracer le diagramme en bâton des fréquences obtenues.

1.5 Loi de Poisson

Soient $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, $n \in \mathbb{N}^*$ et X_n une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètre $\left(n, \dfrac{\lambda}{n}\right)$.

1. Montrer que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$:

$$P(X_n = k) = \frac{\lambda^k}{k!} \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{n^k} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}.$$

2. Montrer que :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{n^k} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{n \to +\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = e^{-\lambda}.$$

   On pourra utiliser pour la deuxième limite que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

3. En déduire que :

$$\lim_{n \to +\infty} P(X_n = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

   La loi de Poisson apparaît comme la loi limite d'une suite de variables suivant une loi binomiale de paramètre $\left(n, \dfrac{\lambda}{n}\right)$ *lorsque* n *tend vers* $+\infty$.

4. (a) La fonction `grand(m,n,'poi',lambda)` simule une matrice $m \times n$ dont chaque coefficient suit une loi de Poisson de paramètre λ.
   Créer un vecteur ligne $U = (U_1, U_2, \ldots, U_{10000})$ contenant un échantillon de 10000 simulations de la loi de Poisson de paramètre 1 puis tracer le diagramme en bâton des fréquences obtenues.

   (b) Écrire une procédure qui, étant donné un entier n, crée un vecteur ligne $U = (U_1, U_2, \ldots, U_{10000})$ contenant un échantillon de 10000 simulations de la loi binomiale de paramètres n et $\dfrac{1}{n}$ et trace le diagramme en bâton des fréquences obtenues.
   Tester pour de grandes valeurs de n et comparer avec le résultat obtenu à la question précédente.

2 Extrait du sujet ECRICOME Voie E 2015

Soit N un entier naturel supérieur ou égal à 3. On dispose d'une urne opaque U contenant N boules indiscernables au touché, $N-1$ blanches et 1 noire.
On effectue des tirages sans remise dans l'urne U jusqu'à l'obtention de la boule noire. On note X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de tirages nécessaires pour l'obtention de la boule noire.
On notera pour tout entier naturel i non nul :

- N_i l'événement "on tire une boule noire lors du i-ième tirage".
- B_i l'événement "on tire une boule blanche lors du i-ième tirage".

1. On simule 10000 cette expérience aléatoire.

   Recopier et compléter le programme SCILAB suivant pour qu'il affiche l'histogramme donnant la fréquence d'apparition du rang d'obtention de la boule noire :

```
N=input('Doner un entier naturel non nul ');
S=zeros(1,N);
for k=1:10000 do
    i=1
    M=N
    while ***** do
        i=i+1;
        M=*****;
    end
    S(i)=S(i)+1
end
disp(S/10000)
bar(S/10000)
```

2. Exécutez-le pour $N=5$. Quelle conjecture pouvez-vous émettre sur la loi de la variable aléatoire X ?

   Pour les questions suivantes, on revient au cas général où $N \geq 3$.

3. En écrivant soigneusement les événements utilisés, calculer $P(X=1)$, $P(X=2)$ et $P(X=3)$.
4. Déterminer la loi de la variable aléatoire X.
5. Préciser le nombre moyen de tirages nécessaires à l'obtention de la boule noire.