TP28

Variables aléatoires discrètes - Ecricome 2018, voie E

Soit n un entier naturel non nul.
Dans une fête foraine, un stand propose le jeu suivant : le joueur lance n fois une pièce et compte le nombre de Pile obtenus. Si ce nombre est pair, le joueur est déclaré vainqueur, et s'il est impair, il est déclaré perdant.
Si le joueur est déclaré vainqueur, il gagne 10 euros pour chaque Pile obtenu, mais s'il a perdu, il doit payer 10 euros pour chaque Pile obtenu.
En particulier, s'il n'obtient aucun Pile, il est déclaré vainqueur, mais ne remporte rien. La pièce est truquée, et à chaque lancer, la probabilité d'obtenir Pile est égale à p ($p \in]0,1[$), et celle d'obtenir Face est de $1-p$.
On notera X la variable aléatoire égale au nombre de Pile obtenus, et G la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.
Enfin, on notera A l'événement : "le joueur est déclaré vainqueur" et on dira que le jeu est favorable au joueur si l'espérance mathématique de la variable aléatoire G est positive.

Partie I

Dans cette partie, on suppose que $n = 3$ et $p = \dfrac{2}{3}$.

1. Reconnaître la loi de X et vérifier que : $\quad P(A) = \dfrac{13}{27}$.
2. Définir en Scilab une fonction d'entête `function res=simulX()` qui effectue trois lancers de la pièce et compte le nombre de piles obtenus.
   Cette fonction fera appelle à la commande `rand` et non à la commande `grand`.
3. Montrer que : $G(\Omega) = \{-30, -10, 0, 20\}$, puis expliciter la loi de G.
4. Calculer l'espérance de G. Le jeu est-il favorable au joueur ?
5. (a) Définir en Scilab une fonction d'entête `function res=simulG()` qui simule la variable aléatoire G.
   Cette fonction fera appelle à la fonction `simulX` définie précédemment.

   (b) Taper et exécuter le programme suivant :

   ```
   S=zeros(1,100000)
   for i=1:100000 do
      S(i)= simulG()
   end

   M=tabul(S,"i")
   disp(M,"M=")
   ```

   Que fait la commande `tabul` ?

   (c) Compléter le programme précédent pour qu'il affiche le diagramme en bâton des fréquences d'apparition des valeurs de G.
   En déduire une valeur approchée de la probabilité que le joueur gagne strictement de l'argent.

   (d) Compléter le programme précédent pour qu'il affiche la moyenne des valeurs prises par G en 100000 simulations de G.
   Commenter.

Partie II

Dans cette partie, on revient au cas général, où n est entier naturel non nul et $p \in]0,1[$.
Celui qui tient le stand souhaite rendre le jeu plus attractif en affichant "À ce jeu, il y a plus de gagnants que de perdants !", et cherche donc les conditions nécessaires sur p et n pour que son affichage ne soit pas mensonger.
Soit Y la variable aléatoire définie par : $Y = (-1)^X$.
Autrement dit, Y prend la valeur 1 lorsque X prend une valeur paire, et Y prend la valeur -1 lorsque X prend une valeur impaire.

1. (a) On note $Z = \dfrac{Y+1}{2}$.
   Déterminer $Z(\Omega)$, puis montrer que Z suit une loi de Bernoulli de paramètre $P(A)$.

   (b) Démontrer que : $E(Y) = 2P(A) - 1$.

2. (a) Donner la loi de X.

   (b) En déduire que l'on a également : $E(Y) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k}$,

   puis que : $E(Y) = (1-2p)^n$.

3. Exprimer alors la valeur de $P(A)$ en fonction de n et p.

4. Démontrer que

$$P(A) \geq \frac{1}{2} \Longleftrightarrow \left[p \leq \frac{1}{2} \text{ OU "} n \text{ est pair"}\right]$$

Partie III

Le concepteur du jeu souhaite cependant vérifier que, tout en laissant son jeu attractif (c'est à dire en faisant en sorte que $P(A) \geq \frac{1}{2}$), son activité soit rentable pour lui, autrement dit que le jeu soit défavorable au joueur (c'est à dire que $E(G) \leq 0$).

1. Exprimer G en fonction de X et Y. En déduire que : $E(G) = 10\sum_{k=0}^{n}(-1)^k kP(X = k)$.

2. Démontrer que : $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$.

3. Montrer que : $E(G) = -10np(1-2p)^{n-1}$.

4. Démontrer alors que :

$$\begin{cases} P(A) \geq \frac{1}{2} \\ \\ E(G) \leq 0 \end{cases} \Longleftrightarrow p \leq \frac{1}{2}$$

5. (a) Étudier la fonction f définie sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ par : $\forall x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, $f(x) = x(1-2x)^{n-1}$.

   (b) Pour une valeur de n fixée, comment le concepteur du jeu doit-il truquer sa pièce (c'est à dire quelle valeur doit-il donner à $p \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$) pour optimiser la rentabilité de son activité ?

6. Compléter la fonction suivante qui prend en entrée n et p et renvoie en sortie un vecteur ligne contenant 200 simulations de la variable aléatoire G :

```
function res= simulationsG(n,p)
   X=grand(1,200, 'bin',n,p)
   Y=.......
   res= .......
endfunction
```

Partie IV

Le forain décide de fixer $n = 2$ et $p = \frac{1}{4}$. En période estivale, il pense pouvoir compter sur la participation de 200 clients dans la journée. Avant de se décider à installer son stand, il voudrait être certain, avec un risque d'erreur inférieur à 10%, qu'il gagnera plus de 100 euros dans la journée.
Pour tout entier i compris entre 1 et 200, on note alors G_i le gain algébrique du i-ième joueur.
On note aussi J la variable aléatoire égale au gain du forain sur toute la journée.

1. Pour tout entier $i \in [\![1, 200]\!]$, donner la loi de G_i et calculer son espérance et sa variance.

2. Exprimer la variable aléatoire J en fonction des variables aléatoires G_i.
   Démontrer alors que $E(J) = 500$ et $V(J) = 11250$.

3. Justifier que : $P(J \leq 100) \leq P(|J - 500| \geq 400)$.

4. *On appelle "inégalité de Bienaymé-Tchébychev", l'inégalité suivante :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ P(|J - E(J)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(J)}{\varepsilon^2}.$$

   Utiliser l'inégalité de Bienaymé-Tchébychev pour montrer que : $P(J \leq 100) \leq \dfrac{9}{128}$.

5. Compte tenu de ses exigences de rentabilité, le forain peut-il installer son stand ?

6. Compléter le programme suivant pour qu'il affiche une valeur approchée de $P(J \leq 100)$; obtenue après 10000 simulations de la variable J :

```
n=2
p=1/4
res=0
for k=1:10000 do
   g=simulationsG(n,p)
   J=-sum(g)
   if ......... then
         res=res+1
   end
end
f=..............
disp(f,"f=")
```