Correction du TP29

Variables aléatoires discrètes - EMLyon 2018, voie E

Partie I : Étude d'une première variable aléatoire

1. (a) Notons, pour tout $i \in \mathbb{N}$, P_i l'événement "Obtenir pile au i-ème lancer", et $F_i = \overline{P_i}$. On a alors

$$(X=0) = P_1 \cap P_2$$
$$(X=1) = (P_1 \cap F_2 \cap P_3) \cup (F_1 \cap P_2 \cap P_3)$$
$$(X=2) = (P_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap P_4) \cup (F_1 \cap P_2 \cap F_3 \cap P_4) \cup (F_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap P_4).$$

En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(X = n)$ signifie que l'on a obtenu n Faces et 2 Piles, le second au $(n+2)$-ème lancer et le premier à l'un des $(n+1)$ rangs précédents.
On obtient donc
$P(X=0) = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$, $P(X=1) = 2 \times \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{8}{27}$ et $P(X=2) = 3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{27}$.

(b) Comme observé à la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(X = n)$ signifie que l'on a obtenu n Faces et 2 Piles, le second au $(n+2)$-ème lancer, le premier à l'un des $(n+1)$ rangs précédents. Formellement :

$$(X=n) = \left[\bigcup_{i=1}^{n+1} \left(P_i \cap \left(\bigcap_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n+1} F_j\right)\right)\right] \cap P_{n+2}.$$

Par incompatibilité et par indépendance des lancers, il vient :

$$P(X=n) = \left(\sum_{i=1}^{n+1} \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n\right) \times \frac{2}{3} = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{4}{3^{n+2}} = (n+1)\frac{4}{3^{n+2}}.$$

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N},\ P(X=n) = (n+1)\frac{4}{3^{n+2}}$.

Partie II : Étude d'une expérience en deux étapes

2. (a) U prend clairement des valeurs entières positives et, pour chaque entier n, il existe une suite de tirages amenant à n Faces et 2 Piles suivi d'un tirage de la boule numérotée n. Autrement dit, $U(\Omega) = \mathbb{N}$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Sachant $(X = n)$, l'urne est composée de $(n+1)$ boules indiscernables au toucher numérotées de 0 à n et U prend la valeur du numéro de la boule tirée. Donc $U \hookrightarrow \mathcal{U}([\![0, n]\!])$.

(c) Soit $k \in \mathbb{N}$. On commence par observer que $(U = k) \cap (X = n) = \emptyset$ si $n < k$ car on ne peut pas tirer une boule numérotée k dans une urne contenant des boules numérotées de 0 à n si $k > n$. Ainsi en appliquant la formule des probabilités totales relativement au système complet d'événements $(X = n)_{n \in \mathbb{N}}$, on obtient :

$$\begin{aligned} P(U=k) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P((X=n) \cap (U=k)) = \sum_{n=k}^{+\infty} P((U=k) \cap (X=n)) \\ &= \sum_{n=k}^{+\infty} P_{(U=k)}(X=n)P(X=n) \underset{2.(b)}{=} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n+1} P(X=n), \end{aligned}$$

ce qui établit la première égalité.
En injectant le résultat trouvé en 1.(b), il vient :

$$\begin{aligned} P(U=k) &= \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n+1} \times (n+1)\frac{4}{3^{n+2}} = 4\sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{3^{n+2}} = 4\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3^{n+k+2}} = \frac{4}{3^{k+2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3^n} \\ &= \frac{4}{3^{k+2}} \times \frac{1}{1-1/3} = \frac{4}{3^{k+2}} \times \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Ainsi, $\forall k \in \mathbb{N},\ P(U=k) = \frac{2}{3^{k+1}}$.

(d) U admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{k\geq 0} kP(U=k)$ converge absolument. Les valeurs prises par U étant positives, ceci équivaut à la convergence de la série. Or,

$$\sum_{k\geq 0} kP(U=k) = \sum_{k\geq 0} k\frac{2}{3^{k+1}} = \sum_{k\geq 1} k\frac{2}{3^{k+1}} = \frac{2}{9}\sum_{k\geq 1} k\frac{1}{3^{k-1}} = \frac{2}{9}\sum_{k\geq 1} k\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}.$$

On reconnait le terme général d'une série géométrique dérivée d'ordre 1 de raison $\frac{1}{3}$. La série converge donc et alors

$$E(U) = \sum_{k=0}^{+\infty} kP(U=k) = \sum_{k=0}^{+\infty} k\frac{2}{3^{k+1}} = \sum_{k=1}^{+\infty} k\frac{2}{3^{k+1}} = \frac{2}{9}\sum_{k=1}^{+\infty} k\frac{1}{3^{k-1}} = \frac{2}{9}\times\frac{1}{(1-1/3)^2} = \frac{2}{9}\times\frac{9}{4} = \frac{1}{2}.$$

Ainsi, $E(U) = \frac{1}{2}$.
Pour déterminer la variance, on commence par étudier l'espérance de $U(U-1)$. On a

$$\sum_{k\geq 0} k(k-1)P(U=k) = \sum_{k\geq 2} k(k-1)\frac{2}{3^{k+1}} = \frac{2}{27}\sum_{k\geq 2} k(k-1)\left(\frac{1}{3}\right)^{k-2}.$$

On reconnait une série géométrique dérivée d'ordre 2 de raison $\frac{1}{3}$, il s'agit donc d'une série convergente, et plus précisément absolument convergente puisque ses termes sont positifs. Il suit donc du théorème de transfert que $U(U-1)$ admet une espérance et

$$\begin{aligned} E(U(U-1) &= \sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1)P(U=k) = \frac{2}{27}\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)\left(\frac{1}{3}\right)^{k-2} \\ &= \frac{2}{27}\times\frac{2}{(1-1/3)^3} = \frac{2}{27}\times\frac{2\times 27}{8} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Mais alors $U^2 = U^2 - U + U = U(U-1) + U$ admet une espérance comme somme de variables aléatoires admettant une espérance et

$$E(U^2) = E(U(U-1)) + E(U) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Il suit alors de la formule de Koenig-Huygens que : $V(U) = E(U^2) - E(U)^2 = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$.

3. (a) V prend clairement des valeurs entières positives ou nulles et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un tirage amenant à n Faces et 2 Piles suivi d'un tirage de la boule 0, auquel cas $(V = n)$ est réalisé. Ainsi, $V(\Omega) = \mathbb{N}$.

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Sachant $(X = n)$, V prend ses valeurs entre 0 et n et, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on a

$$P_{(X=n)}(V=k) = P_{(X=n)}(X-U=k) = P_{(X=n)}(U=n-k) = \frac{1}{n+1}.$$

   Ainsi, sachant $(X = n)$, $V \hookrightarrow \mathcal{U}([\![0, n]\!])$

   (c) En reprenant les calculs effectués en 3.(b), on observe que la loi de V est la même que celle de U. Autrement dit, $\forall k \in \mathbb{N},\ P(V=k) = \frac{2}{3^{k+1}}$.

4. Soient $i, j \in \mathbb{N}$. On a

$$(U=i, V=j) = (U=i, X-U=j) = (U=i, X=i+j).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} P(U=i, V=j) &= P(U=i, X=i+j) = P_{(X=i+j)}(U=i)\times P(X=i+j) \\ &= \frac{1}{i+j+1}\times(i+j+1)\frac{4}{3^{i+j+2}} = \frac{4}{3^{i+j+2}} = \frac{2}{3^{i+1}}\times\frac{2}{3^{j+1}} \\ &= P(U=i)P(V=j). \end{aligned}$$

Ainsi, U et V sont indépendantes.

Partie III : Étude d'un jeu

5. **Simulation informatique**

   (a) On propose la fonction suivante :

```
function x = simule_X()
    nPile = 0
    nFace = 0
    while (nPile<2)
        if (rand()<2/3)
            nPile = nPile +1
        else
            nFace = nFace +1
        end
    end
    x = nFace
endfunction
```

   (b) La fonction proposée dans l'énoncé calcule la fréquence, sur 10 000 simulations, des victoires de A.

   (c) On observe que pour $p \approx 0,8$, on obtient une fréquence de victoires de A approximativement égale à 50%. Ainsi le jeu est équilibré pour $p \approx 0,8$.

6. **Étude de la variable aléatoire** Y

   (a) Z compte le rang du premier succès ("obtenir Pile") dans une suite indéfinie de répétitions d'expériences de Bernoulli indépendantes (lancer la pièce), de même paramètre (p, la probabilité de faire Pile). Ainsi, $Z \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$.

   (b) Y étant le nombre de Faces obtenus jusqu'au premier Pile, on a la relation $Y = Z - 1$. Il s'ensuit que Y admet une espérance et une variance et que

$$E(Y) = E(Z - 1 = E(Z) - 1 = \frac{1}{p} - 1 = \frac{1-p}{p}$$

   et

$$V(Y) = V(Z-1) = V(Z) = \frac{1-p}{p^2}.$$

   (c) Posons $q = 1 - p$. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} P(Y \geq n) &= P(Z - 1 \geq n) = P(Z \geq n+1) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} P(Z = k) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} pq^{k-1} \\ &= pq^n \sum_{k=n+1}^{+\infty} q^{k-(n+1)} = pq^n \sum_{k=0}^{+\infty} q^k = pq^n \times \frac{1}{1-q} = q^n. \end{aligned}$$

   Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N},\ P(Y \geq n) = (1-p)^n$.

7. (a) Avec la formule des probabilités totales relativement au système complet d'évènements $(X = n)_{n\in\mathbb{N}}$,

$$\begin{aligned} P(X \leq Y) &= P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} (X = n) \cap (X \leq Y)\right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} P((X = n) \cap (X \leq Y)) \quad \text{(car les événements sont incompatibles)}, \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} P((X = n) \cap (Y \geq n)) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n) P(Y \geq n) \quad \text{(car } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes).} \end{aligned}$$

   Ainsi, $P(X \leq Y) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n) P(Y \geq n)$.

(b) En injectant les résultats établis en 1.(b) et 6.(c) dans la formule trouvée en 7.(a), on a :

$$\begin{aligned} P(X \leq Y) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n)P(Y \geq n) = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)\frac{4}{3^{n+2}}q^n = \frac{4}{9}\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)\left(\frac{q}{3}\right)^n \\ &= \frac{4}{9}\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{q}{3}\right)^{n-1} = \frac{4}{9} \times \frac{1}{(1-q/3)^2} = \frac{4}{9} \times \left(\frac{3}{3-q}\right)^2 = \frac{4}{(3-q)^2} = \frac{4}{(2+p)^2}. \end{aligned}$$

Ainsi, $P(X \leq Y) = \dfrac{4}{(2+p)^2}$.

(c) Le jeu est équilibré quand $P(X \leq Y) = \dfrac{1}{2}$, c'est-à-dire quand $\dfrac{4}{(2+p)^2} = \dfrac{1}{2}$. Or

$$\begin{aligned} \frac{4}{(2+p)^2} = \frac{1}{2} &\Leftrightarrow 8 = (2+p)^2 \\ &\Leftrightarrow p^2 + 4p - 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow p \text{ est racine de } X^2 + 4X - 4 \\ &\Leftrightarrow p \in \left\{-2-2\sqrt{2},\ -2+2\sqrt{2}\right\}. \end{aligned}$$

Mais $-2-2\sqrt{2} < 0$ et $-2+2\sqrt{2} > 0$ et p est nécessairement positif. Ainsi, le jeu est équitable pour $p = 2\sqrt{2} - 2$.

Remarque : On a $\sqrt{2} \approx 1,41$ donc $2\sqrt{2} - 2 \approx 0,82$, ce qui est cohérent avec la réponse déterminée numériquement à la question 5.(c).