Correction du TP30

# Récurrence d'ordre 2, récurrence forte

**Exercice 1** 1. Notons, pour tout entier naturel $n$, $\mathcal{P}(n)$ la propriété "$u_n = 1 + 2^n$".

Initialisation : $1 + 2^0 = 1 + 1 = 2 = u_0$ et $1 + 2^1 = 1 + 2 = 3 = u_1$ donc $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont vraies.

Hérédité : Soit $n$ un entier naturel. Supposons que que $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ sont vraies, c'est-à-dire $u_n = 1+2^n$ et $u_{n+1} = 1 + 2^{n+1}$. Montrons que $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie, c'est-à-dire que l'on a : $u_{n+2} = 1 + 2^{n+2}$.

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= 3u_{n+1} - 2u_n = 3(1 + 2^{n+1}) - 2(1 + 2^n) = 3 + 3 \times 2^{n+1} - 2 - 2^{n+1} \\ &= 1 + 2 \times 2^{n+1} = 1 + 2^{n+2}, \end{aligned}$$

en utilisant les propriétés $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ à la deuxième égalité. Ceci montre que $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie.

Conclusion : On a montré, par le principe de récurrence, que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1 + 2^n$.

2. Notons, pour tout entier $n \geq 1$, $\mathcal{P}(n)$ la propriété "$v_n \leq 2^{n-1}$".

Initialisation : $v_1 = 1 \leq 2^{1-1} = 1$ donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie. $v_2 = v_1 + v_0 = 1 + 1 = 2 \leq 2^{2-1} = 2$ donc $\mathcal{P}(2)$ est vraie.

Hérédité : Soit un entier $n \geq 1$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ sont vraies, c'est-à-dire $v_n \leq 2^{n-1}$ et $v_{n+1} \leq 2^n$. Montrons que $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie, c'est-à-dire que l'on a : $v_{n+2} \leq 2^{n+1}$.

$$v_{n+2} = v_{n+1} + v_n \leq 2^n + 2^{n-1} = 2^{n-1}(2+1) = 2^{n-1} \times 3 \leq 2^{n-1} \times 4 = 2^{n+1},$$

en utilisant les propriétés $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ à la deuxième étape. Ceci montre que $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie.

Conclusion : On a montré, par le principe de récurrence, que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n \leq 2^{n-1}$.

3. Notons, pour tout entier naturel $n$, $\mathcal{P}(n)$ la propriété "$w_n = n!$".

Initialisation : $w_0 = 1 = 0!$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie. $w_1 = 1 = 1!$ donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

Hérédité : Soit $n$ un entier naturel. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ sont vraies, c'est-à-dire $w_n = n!$ et $w_{n+1} = (n+1)!$. Montrons que $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie, c'est-à-dire que l'on a : $w_{n+2} = (n+2)!$.

$$w_{n+2} = (n+1)(w_{n+1} + w_n) = (n+1)((n+1)! + n!) = (n+1) \times n! \times ((n+1)+1) = (n+2)!,$$

en utilisant les propriétés $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ à la deuxième étape. Ceci montre que $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie.

Conclusion : On a montré, par le principe de récurrence, que $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n = n!$.

---

**Exercice 2** 1. Notons, pour tout entier $n \geq 1$, $\mathcal{P}(n)$ la propriété "$u_n = 3n$".

Initialisation : $u_1 = 3 = 3 \times 1$ donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

Hérédité : Soit un entier $n \geq 1$. Supposons que $\mathcal{P}(1), \mathcal{P}(2), \ldots, \mathcal{P}(n)$ sont vraies, c'est-à-dire $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $u_k = 3k$. Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire que l'on a : $u_{n+1} = 3(n+1)$.

$$u_{n+1} = \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k = \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n} 3k = \frac{6}{n}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{6}{n} \times \frac{n(n+1)}{2} = 3(n+1),$$

en utilisant l'hypothèse de récurrence à la deuxième étape. Ceci montre que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion : On a montré, par le principe de récurrence, que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 3n$.

2. Notons, pour tout entier $n \geq 1$, $\mathcal{P}(n)$ la propriété "$v_n = 2n^2$".

Initialisation : $v_1 = 2 = 2 \times 1^2$ donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

Hérédité : Soit un entier $n \geq 1$. Supposons que $\mathcal{P}(1), \mathcal{P}(2), \ldots, \mathcal{P}(n)$ sont vraies, c'est-à-dire $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $v_k = 2k^2$. Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire que l'on a : $v_{n+1} = 2(n+1)^2$.

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{6(n+1)}{n(2n+1)} \sum_{k=1}^{n} v_k = \frac{6(n+1)}{n(2n+1)} \sum_{k=1}^{n} 2k^2 = \frac{12(n+1)}{n(2n+1)} \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{12(n+1)}{n(2n+1)} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &= 2(n+1)^2, \end{aligned}$$

en utilisant l'hypothèse de récurrence à la deuxième étape. Ceci montre que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion : On a montré, par le principe de récurrence, que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = 2n^2$.

3. On remarque que : $w_1 = 1$, $w_2 = 1$, $w_3 = 1$...

   Notons, pour tout entier $n \geq 1$, $\mathcal{P}(n)$ la propriété "$w_n = 1$".

   Initialisation : $w_1 = 1$ donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

   Hérédité : Soit un entier $n \geq 1$. Supposons que $\mathcal{P}(1), \mathcal{P}(2), \ldots, \mathcal{P}(n)$ sont vraies, c'est-à-dire $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $w_k = 1$. Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire que l'on a : $w_{n+1} = 1$.

$$w_{n+1} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} w_k = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} 1 = \frac{1}{n} \times n = 1,$$

   en utilisant l'hypothèse de récurrence à la deuxième étape. Ceci montre que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

   Conclusion : On a montré, par le principe de récurrence, que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $w_n = 1$.