TP30

Récurrence d'ordre 2, récurrence forte

1 Récurrence d'ordre 2

La **récurrence d'ordre 2** est utile lorsqu'une propriété $\mathcal{P}(n)$ dépend à la fois de $\mathcal{P}(n-1)$ et de $\mathcal{P}(n-2)$.

Théorème 1 (Principe de récurrence d'ordre 2)

Soit $\mathcal{P}(n)$ une propriété dépendant d'un entier naturel n et $n_0 \in \mathbb{N}$. On suppose que :

$$\begin{cases} \mathcal{P}(n_0) \text{ et } \mathcal{P}(n_0+1) \text{ sont vraies (initialisation)} \\ \forall n \geq n_0,\ (\mathcal{P}(n) \text{ et } \mathcal{P}(n+1)) \ \Rightarrow\ \mathcal{P}(n+2) \ \text{ (hérédité)} \end{cases}$$

Alors, pour tout $n \geq n_0$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

▶ *Pour montrer que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$, on procède en trois étapes :*

- *Initialisation : On montre que $\mathcal{P}(n_0)$ et $\mathcal{P}(n_0+1)$ sont vraies.*
- *Hérédité : On considère un entier n fixé supérieur ou égal à n_0. On suppose que $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ sont vraies. En utilisant $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$, on montre qu'alors $\mathcal{P}(n+2)$ est encore vraie.*
- *Conclusion : $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$.*

Exemple. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0 = u_1 = -1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n \end{cases}$.
Montrons que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3^n - 2^{n+1}$.

Exercice 1

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$.
   Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 1 + 2^n$.
2. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $v_0 = v_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+2} = v_{n+1} + v_n$.
   Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n \leq 2^{n-1}$.
3. Soit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $w_0 = w_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_{n+2} = (n+1)(w_{n+1} + w_n)$.
   Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n = n!$.

2 Récurrence forte

La **récurrence forte** est utile lorsqu'une propriété $\mathcal{P}(n)$ dépend de toutes les propriétés précédentes.

Théorème 2 (Principe de récurrence forte)

Soit $\mathcal{P}(n)$ une propriété dépendant d'un entier naturel n et $n_0 \in \mathbb{N}$. On suppose que :

$$\begin{cases} \mathcal{P}(n_0) \text{ est vraie (initialisation)} \\ \forall n \geq n_0,\ (\mathcal{P}(n_0), \mathcal{P}(n_0+1), \mathcal{P}(n_0+2), \ldots, \mathcal{P}(n)) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1) \text{ (hérédité)} \end{cases}$$

Alors, pour tout $n \geq n_0$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

► *Pour montrer que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$, on procède en trois étapes :*

- *Initialisation : On montre que $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie.*
- *Hérédité : On considère un entier n fixé supérieur ou égal à n_0. On suppose que $\mathcal{P}(n_0), \mathcal{P}(n_0+1), \mathcal{P}(n_0+2), \ldots, \mathcal{P}(n)$ sont vraies. En utilisant $\mathcal{P}(n_0), \mathcal{P}(n_0+1), \mathcal{P}(n_0+2), \ldots, \mathcal{P}(n)$, on montre qu'alors $\mathcal{P}(n+1)$ est encore vraie.*
- *Conclusion : $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$.*

Exemple. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = 2^{n-1}$.

Exercice 2

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_1 = 3$ et pour tout $n \geq 1$, $u_{n+1} = \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k$.

   Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = 3n$.

2. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $v_1 = 2$ et $\forall n \geq 1,\ v_{n+1} = \frac{6(n+1)}{n(2n+1)}\sum_{k=1}^{n} v_k$.

   Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = 2n^2$.

3. Soit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $w_1 = 1$ et $\forall n \geq 1,\ w_{n+1} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} w_k$.

   Calculer les premiers termes de la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, conjecturer une formule puis la démontrer.