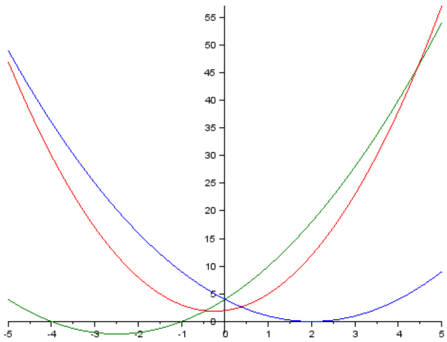
Correction du TP4

Représentations graphiques des fonctions

Exercice 1 1. Voici les instructions pour tracer les fonctions f_1, f_2 et f_3 :

```
-->x=-5:0.01:5;
-->function y=f1(x); y=x^2-4*x+4; endfunction
-->function y=f2(x); y=x^2+5*x+4; endfunction
-->function y=f3(x); y=2*x^2+x+2; endfunction
-->plot(x,f1,x,f2,x,f3)
```

On obtient les courbes suivantes :

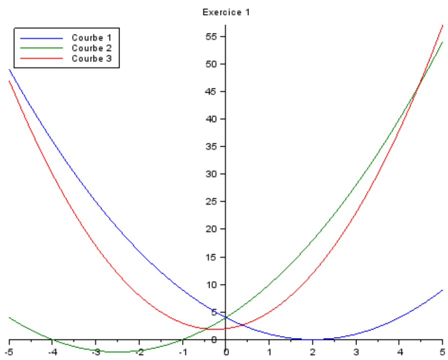


La courbe bleu est la courbe représentative de la fonction f_1, la verte est celle de f_2 et la rouge est celle de f_3.

2. Voici les instructions pour ajouter un titre et une légende au tracé obtenu :

```
-->xtitle('Exercice 1')
-->legend(['Courbe 1','Courbe 2','Courbe 3'],'in_upper_left')
```

On obtient le résultat suivant :

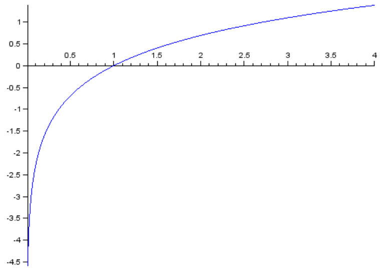


3. La courbe 1 coupe l'axe des abscisses en un unique point, l'unique racine de f_1. La courbe 2 coupe l'axe des abscisses en deux points, les deux racines de f_2. La courbe 3 ne coupe pas l'axe des abscisses, car f_3 n'admet pas de racines.

Exercice 2 1. • Pour la fonction logarithme :

```
-->x=0.01:0.01:4;
-->plot(x,ln)
```

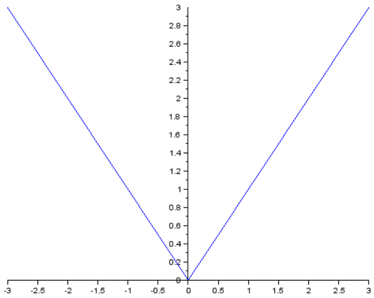
On obtient le tracé suivant :



- Pour la fonction valeur absolue :

```
-->scf(1);
-->x=-3:0.01:3;
-->plot(x,abs)
```

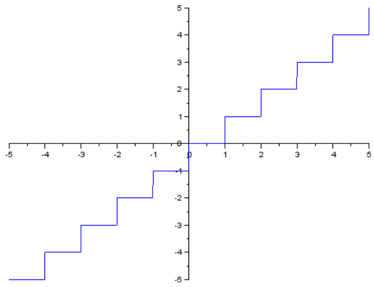
On obtient le tracé suivant :



- Pour la fonction partie entière :

```
-->scf(2);
-->x=-5:0.01:5;
-->plot(x,floor)
```

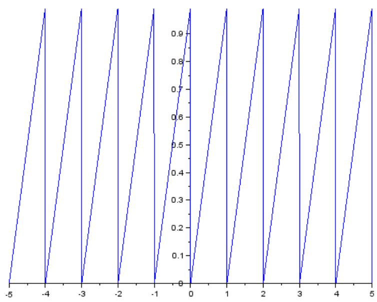
On obtient le tracé suivant :



- Pour la fonction partie décimale :

```
-->scf(3);
-->x=-5:0.01:5;
-->function y=f(x); y=floor(x)-x; endfunction;
-->plot(x,f)
```

On obtient le tracé suivant :



2. Voici les instructions pour ajouter un titre à chaque tracé obtenu :

```
-->scf(0); xtitle('Logarithme')
-->scf(1); xtitle('Valeur absolue')
-->scf(2); xtitle('Partie entière')
-->scf(3); xtitle('Partie décimale')
```

3. Pour les fonctions partie entière et partie décimale, on remarque que le tracé n'est pas satisfaisant : il y a des segments verticaux aux points de discontinuités. Cela s'explique par le fait que Scilab trace les courbes points par points et qu'il relie les points par des segments.

Exercice 3 1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x)$ est bien défini donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.

Pour que $g(x)$ soit bien défini, il faut que $x + \sqrt{x^2+1} > 0$. On a deux cas :

- Si $x \geq 0$: on a $x \geq 0$ et $\sqrt{x^2+1} > 0$ donc $x + \sqrt{x^2+1} > 0$.
- Si $x \leq 0$: on a (par croissance de la fonction racine carrée),

$$x^2 + 1 > x^2 \Rightarrow \sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2} = |x| = -x \Rightarrow x + \sqrt{x^2+1} > 0.$$

Dans tous les cas, $x + \sqrt{x^2+1} > 0$. Donc $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}$.

2. f est continue et dérivable sur son ensemble de définition et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$. Alors :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

f est continue et strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. D'après le théorème de la bijection, f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
f \circ g(x) &= f(g(x)) = f(\ln(x + \sqrt{x^2+1})) = \frac{e^{\ln(x+\sqrt{x^2+1}) - e^{-\ln(x+\sqrt{x^2+1})}}}{2} \\
&= \frac{e^{\ln(x+\sqrt{x^2+1})} - e^{\ln(1/(x+\sqrt{x^2+1}))}}{2} = \frac{1}{2}\left(x + \sqrt{x^2+1} - \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{x^2 + 2x\sqrt{x^2+1} + x^2 + 1 - 1}{x + \sqrt{x^2+1}}\right) = \frac{x^2 + x\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2+1}} = x.
\end{aligned}$$

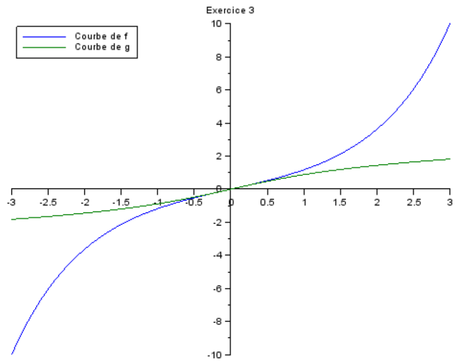
$$\begin{aligned}
g \circ f(x) &= g(f(x)) = g\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) = \ln\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} + \sqrt{\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 + 1}\right) \\
&= \ln\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} + \sqrt{\frac{e^{2x} + e^{-2x} - 2 + 4}{4}}\right) = \ln\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} + \sqrt{\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2}\right) \\
&= \ln\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} + \frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) = \ln(e^x) = x.
\end{aligned}$$

Donc g est bien la bijection réciproque de f.

4. Pour tracer $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$, on utilise les instructions suivantes :

```
-->function y=f(x); y=(exp(x)-exp(-x))/2; endfunction
-->function y=g(x); y=ln(x+sqrt(x^2+1)); endfunction
-->x=-3:0.1:3;
-->plot(x,f,x,g)
-->xtitle('Exercice 3')
-->legend(['Courbe de f','Courbe de g'],'in_upper_left')
```

On obtient le résultat suivant :



Exercice 4 1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1 + x^2 \neq 0$, donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.

2. f est continue et dérivable sur $\mathcal{D}_f$ et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \frac{(-2x) \times (1 + x^2) - (1 - x^2) \times (2x)}{(1 + x^2)^2} = \frac{-4x}{(1 + x^2)^2}.$$

On peut alors dresser le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1

3. f est continue et strictement décroissante de $\mathbb{R}^+$ à valeurs dans $]-1, 1]$. D'après le théorème de la bijection, f réalise une bijection de $\mathbb{R}^+$ sur $]-1, 1]$.

4. Soit $y \in]-1, 1]$. On résout l'équation $y = f(x)$ d'inconnue x :

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = \frac{1 - x^2}{1 + x^2} \Leftrightarrow y + yx^2 = 1 - x^2 \Leftrightarrow x^2(1 + y) = 1 - y \Leftrightarrow x^2 = \frac{1 - y}{1 + y} \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{1 - y}{1 + y}}.$$

Donc $f^{-1} :]-1, 1] \to \mathbb{R}^+, y \mapsto \sqrt{\dfrac{1 - y}{1 + y}}$.

5. Pour tracer $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ (f^{-1} est noté g dans Scilab), on utilise les instructions suivantes :

```
-->function y=f(x); y=(1-x^2)/(1+x^2); endfunction
-->function y=g(x); y=sqrt((1-y)/(1+y)); endfunction
-->x=0:0.01:5; y=-0.9:0.01:1;
-->plot(x,f,y,g)
-->xtitle('Exercice 4')
-->legend(['Courbe de f','Courbe de g'],'in_upper_left')
```