

Correction du TP6

Calcul des termes d'une suite réelle

Exercice 1 1. Pour la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

```
-->function res=a(n); res=(n^2+3+ln(n))/(exp(n)+sqrt(n^4+n^2)); endfunction
-->a(10), a(100), a(1000)
ans =
    1.0477994105884
ans =
    1.0007104827453
ans =
    1.0000094077507
```

On remarque que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ semble converger vers 1. Ceci est en effet le cas :

$$a_n = \frac{n^2 + 3 + \ln(n)}{e^{-n} + \sqrt{n^4 + n^2}} = \frac{n^2 \left(1 + \frac{3}{n^2} + \frac{\ln(n)}{n^2}\right)}{n^2 \left(\frac{e^{-n}}{n^2} + \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}\right)} = \frac{1 + \frac{3}{n^2} + \frac{\ln(n)}{n^2}}{\frac{e^{-n}}{n^2} + \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$$

2. Pour la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

```
-->function res=b(n); res=sqrt(n^2+2*n)-sqrt(2*n^2+1); endfunction
-->b(10), b(100), b(1000)
ans =
    - 3.2229957286545
ans =
    - 40.429842343402
ans =
    - 413.21441542707
```

On remarque que $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ semble diverger vers $-\infty$. Ceci est en effet le cas :

$$\begin{aligned} b_n &= \sqrt{n^2 + 2n} - \sqrt{2n^2 + 1} = \frac{(\sqrt{n^2 + 2n} - \sqrt{2n^2 + 1})(\sqrt{n^2 + 2n} + \sqrt{2n^2 + 1})}{\sqrt{n^2 + 2n} + \sqrt{2n^2 + 1}} \\ &= \frac{n^2 + 2n - 2n^2 - 1}{\sqrt{n^2 + 2n} + \sqrt{2n^2 + 1}} = \frac{-n^2 + 2n - 1}{\sqrt{n^2 + 2n} + \sqrt{2n^2 + 1}} = \frac{n^2 \left(-1 + \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}\right)}{n \left(\sqrt{1 + \frac{2}{n}} + \sqrt{2 + \frac{1}{n^2}}\right)} \\ &= n \times \frac{-1 + \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}}{\sqrt{1 + \frac{2}{n}} + \sqrt{2 + \frac{1}{n^2}}}. \end{aligned}$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} -1 + \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2} = -1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \frac{2}{n}} + \sqrt{2 + \frac{1}{n^2}} = 1$, on a, par produit, $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = -\infty$.

3. Pour la suite $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

```
-->function res=c(n); res=(1/2)*ln(n^2+sqrt(n)+1)-ln(n-sqrt(n)+1); endfunction
-->c(10), c(100), c(1000)
ans =
    0.2640267483039
ans =
    0.0948603771929
ans =
    0.0311177625351
```

On remarque que $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ semble converger vers 0. Ceci est en effet le cas :

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2} \ln(n^2 + \sqrt{n} + 1) - \ln(n - \sqrt{n} + 1) = \ln \left(\frac{\sqrt{n^2 + \sqrt{n} + 1}}{n - \sqrt{n} + 1} \right) \\ &= \ln \left(\frac{n \sqrt{1 + \frac{1}{n\sqrt{n}} + \frac{1}{n^2}}}{n \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}\right)} \right) = \ln \left(\frac{\sqrt{1 + \frac{1}{n\sqrt{n}} + \frac{1}{n^2}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}} \right) \end{aligned}$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{n\sqrt{n}} + \frac{1}{n^2}} = 1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} = 1$, donc par composition $\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = \ln(1) = 0$.

Exercice 2 1. Voici la procédure pour calculer v_n :

```
function res=v(n)
    res=1
    for k=1:n do
        res=2*res
    end
endfunction
```

2. (a) (v_n) est une suite géométrique de raison 2 et de premier terme $v_0 = 1$. Donc, $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = 2^n \times 1 = 2^n$.
 (b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n = +\infty$ car $2 > 1$.

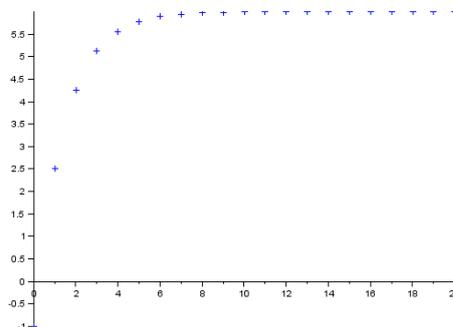
Exercice 3 1. Voici la procédure pour calculer w_n :

```
function res=w(n)
    res=-1
    for k=1:n do
        res=(1/2)*res+3
    end
endfunction
```

2. On réalise le tracé des 21 premières valeurs de la suite (w_n) en utilisant l'instruction suivante :

```
-->plot(0:20,w,"+")
```

On obtient le résultat suivant :



La suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ semble converger vers 6.

3. (a) (w_n) est une suite arithmético-géométrique. On résout $x = \frac{1}{2}x + 3$:

$$x = \frac{1}{2}x + 3 \Leftrightarrow x - \frac{1}{2}x = 3 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x = 3 \Leftrightarrow x = 6.$$

On considère la suite $(w_n - 6)$.

$$w_{n+1} - 6 = \frac{1}{2}w_n + 3 - 6 = \frac{1}{2}w_n - 3 = \frac{1}{2}(w_n - 6)$$

Donc $(w_n - 6)$ est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $w_0 - 6 = -1 - 6 = -7$. Alors, pour tout entier naturel n ,

$$w_n - 6 = \left(\frac{1}{2}\right)^n \times (-7) \text{ donc } w_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \times (-7) + 6.$$

(b) Comme $\frac{1}{2} \in]-1, 1[$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 6$.

Exercice 4 1. Voici la procédure pour calculer y_n :

```

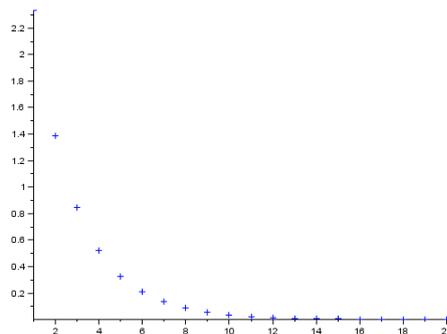
function res=y(n)
  if n==0 then
    res=4
  elseif n==1 then
    res=7/3
  else
    a=4
    b=7/3
    for k=2:n do
      res=(7/6)*b-(2/6)*a
      a=b
      b=res
    end
  end
endfunction

```

2. On réalise le tracé des 21 premières valeurs de la suite (y_n) en utilisant l'instruction suivante :

```
-->plot(0:20,y,"+")
```

On obtient le résultat suivant :



La suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ semble converger vers 0.

3. (a) $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2. L'équation caractéristique associée est $6x^2 - 7x + 2 = 0$. On résout cette équation : $\Delta = (-7)^2 - 4 \times 6 \times 2 = 1 > 0$ et on obtient deux racines $x_1 = \frac{7-1}{2 \times 6} = \frac{1}{2}$ et $x_2 = \frac{7+1}{2 \times 6} = \frac{2}{3}$.

La suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc de la forme : $y_n = \lambda \left(\frac{1}{2}\right)^n + \mu \left(\frac{2}{3}\right)^n$, où λ et μ sont des constantes à déterminer avec y_0 et y_1 .

$$\begin{cases} y_0 = 4 = \lambda + \mu \\ y_1 = \frac{7}{3} = \frac{1}{2}\lambda + \frac{2}{3}\mu \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu = 4 \\ 2 \times \frac{2}{3}\mu - \mu = 2 \times \frac{7}{3} - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu = 4 \\ \mu = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda = \mu = 2$$

$$\text{Donc } \forall n \in \mathbb{N}, y_n = 2 \left(\frac{1}{2}\right)^n + 2 \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

(b) Comme $\frac{1}{2}, \frac{2}{3} \in]-1, 1[$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$. Par somme des limites, $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = 0$.

Exercice 5 1. Voici les trois procédures pour calculer S_n , T_n et U_n :

```
function res=S(n)
    res=0
    for k=1:n do
        res=res+1/sqrt(k)
    end
endfunction
```

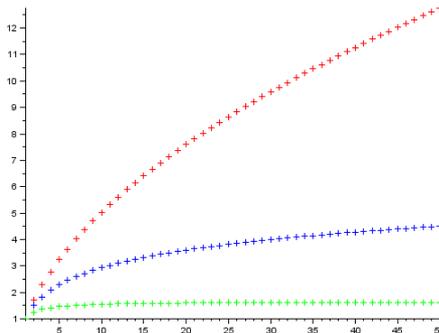
```
function res=T(n)
    res=0
    for k=1:n do
        res=res+1/k
    end
endfunction
```

```
function res=U(n)
    res=0
    for k=1:n do
        res=res+1/k^2
    end
endfunction
```

2. On réalise le tracé des 50 premières valeurs de $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en utilisant l'instruction suivante :

```
-->plot(1:50,S,"r+"); plot(1:50,T,"b+"); plot(1:50,U,"g+");
```

On obtient le résultat suivant (où la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est représentée en rouge, $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en bleu et $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en vert) :



Les suites $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ semblent diverger vers $+\infty$ alors que $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ semble converger.