TP6

Calcul des termes d'une suite réelle

On a vu en cours deux façons de définir une suite :

- par une **formule explicite**, directement en fonction de n; par exemple,
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{e^n}{n^2+1}.$$
- par une **formule de récurrence**, c'est-à-dire une relation entre les termes consécutifs de la suite et la donnée d'un ou plusieurs premiers termes; par exemple,
$$v_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = 2v_n.$$

On va donner, dans les deux cas, les instructions sur Scilab pour calculer les termes de la suite.

1 Suite définie explicitement

Si la suite est définie de façon explicite, du type $u_n = f(n)$, on définira la suite u comme une fonction dépendant de la variable n.
Considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_n = \dfrac{e^n}{n^2+1}$. Alors on définit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur Scilab de la façon suivante :

```
function res=u(n)
    res=exp(n)/(n^2+1)
endfunction
```

On peut alors calculer les termes de la suite dans la console Scilab :

```
-->u(1), u(5), u(10)
 ans  =
    1.3591409142295
 ans  =
    5.7081984270222
 ans  =
    218.08381975056
```

Exercice 1 1. Définir sur Scilab les suites suivantes :

$$a_n = \frac{n^2+3+\ln(n)}{e^{-n}+\sqrt{n^4+n^2}} \qquad b_n = \sqrt{n^2+2n} - \sqrt{2n^2+1} \qquad c_n = \frac{1}{2}\ln(n^2+\sqrt{n}+1) - \ln(n-\sqrt{n}+1)$$

2. Pour chacune de ces suites, calculer plusieurs de leurs termes et conjecturer sur leurs limites.
3. Prouver ces conjectures.

2 Suite définie par une relation de récurrence

Si la suite est définie par récurrence sur plusieurs termes, du type $u_n = f(u_{n-1}, u_{n-2}...)$, on devra procéder par itération en utilisant une boucle `for`. Considérons la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par récurrence par :

$$v_0 = 1 \ \text{ et } \ \forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = 2v_n.$$

Pour calculer le n-ième terme v_n de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on utilise une variable locale `res` qu'on initialise à v_0 et qui, à chaque passage dans la boucle `for`, prend successivement les valeurs $v_1, v_2, \dots, v_n$.

Exercice 2 1. Écrire une procédure qui, pour un entier n donné, calcule le n-ième terme v_n de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie précédemment.

2. *Les deux prochaines questions sont à résoudre indépendamment de Scilab.*
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 2^n$.
   (b) En déduire la limite de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

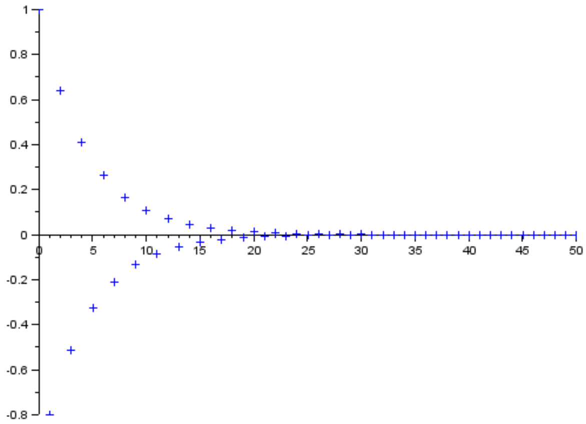
3 Représentation graphique d'une suite

Il est possible de construire la représentation graphique d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, c'est-à-dire l'ensemble des points $M(n, u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour cela, on définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ comme une fonction et on la trace en utilisant la commande `plot`.

Par exemple, pour la suite $u_n = \left(-\frac{4}{5}\right)^n$,

```
function res=u(n)
    res=(-4/5)^n
endfunction

clf;
plot(0:50,u,'+')
```



Exercice 3 On définit la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $w_0 = -1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ w_{n+1} = \frac{1}{2}w_n + 3$.

1. Écrire une procédure qui, pour un entier naturel n donné, calcule w_n.
2. Construire la représentation graphique de $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$, puis établir une conjecture sur sa convergence.
3. *Les deux prochaines questions sont à résoudre indépendamment de Scilab.*
   (a) Déterminer une expression de w_n en fonction de n.
   (b) Prouver la conjecture sur la convergence de $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 4 On définit la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $y_0 = 4$, $y_1 = \frac{7}{3}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ 6y_{n+2} = 7y_{n+1} - 2y_n$.

1. Écrire une procédure qui, pour un entier naturel n donné, calcule y_n.
2. Construire la représentation graphique de $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, puis établir une conjecture sur sa convergence.
3. *Les deux prochaines questions sont à résoudre indépendamment de Scilab.*
   (a) Déterminer une expression de y_n en fonction de n.
   (b) Prouver la conjecture sur la convergence de $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 5 On considère les suites $(S_n)_{n\geq 1}$, $(T_n)_{n\geq 1}$ et $(U_n)_{n\geq 1}$ définies par :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}, \qquad T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}, \qquad U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}.$$

1. Écrire trois procédures qui, étant donné un entier n, calculent respectivement S_n, T_n et U_n.
2. Construire une représentation graphique de $(S_n)_{n\geq 1}$, $(T_n)_{n\geq 1}$ et $(U_n)_{n\geq 1}$.

On remarque que $(S_n)_{n\geq 1}$ et $(T_n)_{n\geq 1}$ divergent vers $+\infty$ et $(U_n)_{n\geq 1}$ converge.

Plus généralement, on peut montrer que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.