TP7

Approximation de la limite de suites adjacentes

Rappelons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux **suites adjacentes** si :

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante,
- $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante,
- $\lim_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0$.

Alors, d'après le **théorème des suites adjacentes**, elles convergent vers une **limite commune** ℓ et on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq \ell \leq v_n.$$

Ainsi, en calculant u_n et v_n pour n assez grand, on obtient un encadrement de ℓ avec bonne précision.

Exemple. Considérons les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \qquad \text{et} \qquad v_n = u_n + \frac{1}{n}.$$

On a démontré au TD3 que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes et convergent vers une limite commune ℓ. La procédure suivante permet de calculer une approximation de ℓ à ε près, ε étant un nombre réel strictement positif entré par l'utilisateur :

```
eps=input('Donner une valeur de epsilon: ')
u=1
v=2
n=1
while abs(v-u)>eps do
    n=n+1
    u=u+1/(n^2)
    v=u+1/n
end
disp(v,u)
```

On peut tester pour différentes valeurs de ε :

- En prenant $\varepsilon = 10^{-3}$:
  ```
  -->exec('C:\TP8-Approximation de la limite de suites adjacentes\tp8a.sce', -1)
  Donner une valeur de epsilon: 10^-3
      1.6439345666816
      1.6449345666816
  ```
  On obtient l'encadrement $1,6439345666816 \leq \ell \leq 1,6449345666816$ et on a donc l'approximation $\ell \simeq 1,64$.

- En prenant $\varepsilon = 10^{-6}$:
  ```
  -->exec('C:\TP8-Approximation de la limite de suites adjacentes\tp8a.sce', -1)
  Donner une valeur de epsilon: 10^-6
      1.6449330668488
      1.6449340668488
  ```
  On obtient l'encadrement $1,6449330668488 \leq \ell \leq 1,6449340668488$ et on a donc l'approximation $\ell \simeq 1,644934$.

Remarques.

1. On peut démontrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent vers $\ell = \dfrac{\pi^2}{6} \simeq 1,6449340668482$.

2. Pour $\varepsilon = 10^{-3}$, Scilab donne le résultat immédiatement. Par contre, il faut presque 30 secondes pour obtenir le résultat pour $\varepsilon = 10^{-6}$. Cela s'explique par la vitesse de convergence très lente de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Il faut en effet 1000 itérations pour obtenir ℓ avec une précision de 10^{-3} et 1000000 itérations pour obtenir ℓ avec une précision de 10^{-6}...

   On reviendra sur cette notion de vitesse de convergence au prochain TP.

Exercice 1 On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2}{(4k+1)(4k+3)} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{4n-1}.$$

1. Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes et convergent vers une même limite.
2. Construire une procédure qui, étant donné un entier naturel n non nul, calcule u_n et v_n.
3. Construire une procédure qui, étant donné $\varepsilon > 0$, permet de calculer une approximation de la limite des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ à ε près.

Exercice 2 On considère les suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par

$$v_0 = 1,\ w_0 = 2 \ \text{ et } \ \forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = \frac{2}{3}v_n + \frac{1}{3}w_n \ \text{ et } \ w_{n+1} = \frac{1}{3}v_n + \frac{2}{3}w_n.$$

1. Construire une procédure qui, étant donné un entier naturel n, calcule v_n et w_n.
2. On pose $t_n = v_n - w_n$.
   (a) Montrer que $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on précisera sa raison.
   (b) Exprimer t_n en fonction de n.
   (c) En déduire que, pour tout entier naturel n, $v_n \leq w_n$ et déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n - w_n)$.
3. (a) Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
   (b) Montrer que les suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers une même limite notée ℓ.
4. (a) Construire une procédure qui, étant donné $\varepsilon > 0$, permet de calculer une approximation de ℓ à ε près.
   (b) Vers qu'elle limite semblent converger $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
5. On pose $s_n = v_n + w_n$.
   (a) Montrer que la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.
   (b) En déduire la valeur de ℓ.

Exercice 3 On considère les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $a_0 = 1$, $b_0 = 2$ et les relations :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \quad \text{et} \quad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}.$$

On admet que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et qu'elles convergent vers une limite commune.

1. Construire une procédure qui, étant donné un entier naturel n, calcule a_n et b_n.
2. Construire une procédure qui, étant donné $\varepsilon > 0$, permet de calculer une approximation de la limite commune des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à ε près.