Correction du TP9

Étude de fonction

Exercice 1

Voici les limites à déterminer :

(1) $\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{e^x} = -\infty$ (2) $\lim_{x\to 0^-} e^{1/x} = 0$ (3) $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{\frac{1}{x}} = +\infty$

(4) $\lim_{x\to-\infty} x^2e^x = 0$ par c.c. (5) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{e^x} = 0$ par c.c. (6) $\lim_{x\to 1} \frac{1}{(\ln(x))^2} = +\infty$

(7) $\lim_{x\to 0^+} \frac{e^x}{\sqrt{x}} = +\infty$ (8) $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{1}{\ln(x)}} = 0$ (9) $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\ln(x) = 0$ par c.c.

(10) $\lim_{x\to 1^+} e^{1/\ln(x)} = +\infty$ (11) $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{e^x} = -\infty$ (12) $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}}{\ln(x)} = 0$

Exercice 2

1. f est définie si $1+x^2>0$ ce qui est toujours vrai. Donc $\mathcal{D}_f=\mathbb{R}$ et f est continue et dérivable sur $\mathcal{D}_f$.

   $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$. Pas d'asymptote horizontale ou verticale.

   Enfin, $f'(x) = \frac{2x}{1+x^2}$.

2. g est définie si $x^2-1\neq 0 \Leftrightarrow x\neq\pm 1$. Donc $\mathcal{D}_g=\mathbb{R}\setminus\{\pm 1\}$ et g est continue et dérivable sur $\mathcal{D}_g$.

   $\lim_{x\to-1^-} g(x) = \lim_{x\to 1^+} g(x) = +\infty$, $\lim_{x\to-1^+} g(x) = \lim_{x\to 1^-} g(x) = -\infty$, $\lim_{x\to-\infty} g(x) = 0$.

   En $+\infty$, on a une forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$ donc on factorise par le terme dominant :

   $$\frac{e^{2x}}{x^2-1} = \frac{e^{2x}}{x^2}\times\frac{1}{1-1/x^2} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty,$$

   par croissances comparées. Deux asymptotes verticales d'équation $x=-1$ et $x=1$. Une asymptote horizontale en $-\infty$ d'équation $y=0$.

   Enfin, $g'(x) = \frac{2e^{2x}\times(x^2-1)-e^{2x}\times 2x}{(x^2-1)^2}$.

3. h est définie si $x\neq 0$. Donc $\mathcal{D}_h=\mathbb{R}^*$ et h est continue et dérivable sur $\mathcal{D}_h$.

   $\lim_{x\to-\infty} h(x) = \lim_{x\to 0^-} h(x) = 0$, $\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to 0^+} h(x) = +\infty$. Une asymptote verticale d'équation $x=0$. Une asymptote horizontale en $-\infty$ d'équation $y=0$.

   Enfin, $h'(x) = \left(1-\frac{1}{x^2}\right)\exp\left(x+\frac{1}{x}\right)$.

4. i est définie si $x^2+1\geq 0$ ce qui est toujours vrai (on a même $x^2+1>0$). Donc $\mathcal{D}_i=\mathbb{R}$ et i est continue et dérivable sur $\mathcal{D}_i$.

   $\lim_{x\to+\infty} i(x) = +\infty$. En $-\infty$, on a une forme indéterminée $\infty-\infty$ donc on multiplie par l'expression conjuguée :

   $$\sqrt{x^2+1}+x = (\sqrt{x^2+1}+x)\times\frac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}-x} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x} \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 0.$$

   Pas d'asymptote verticale. Une asymptote horizontale en $-\infty$ d'équation $y=0$.

   Enfin, $i'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}+1$.

5. j est définie si $\frac{2-x}{x+3}>0$ et $x+3\neq 0$. En faisant un tableau de signe, on obtient que $\mathcal{D}_j=]-3,2[$ et j est continue et dérivable sur $\mathcal{D}_j$.

   $\lim_{x\to 2^-} j(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to-3^+} j(x) = +\infty$. Deux asymptotes verticales d'équation $x=-3$ et $x=2$. Pas d'asymptote horizontale.

Enfin, $j'(x) = \dfrac{\dfrac{(-1)\times(x+3)-(2-x)\times 1}{(x+3)^2}}{\dfrac{2-x}{x+3}} = \dfrac{-5}{(x+3)^2}\times\dfrac{x+3}{2-x} = \dfrac{-5}{(x+3)(2-x)}$.

6. k est définie si $x^2+x+1 \geq 0$ et si $x^2+x+1 \neq 0$ ce qui est toujours vrai. Donc $\mathcal{D}_k = \mathbb{R}$ et k est continue et dérivable sur $\mathcal{D}_k$.

   $\lim\limits_{x\to+\infty} k(x) = 0$. En $-\infty$, on a une forme indéterminée $\infty-\infty$ donc on factorise par le terme dominant :

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2\left(1+1/x+1/x^2\right)}} \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 0.$$

   Pas d'asymptote verticale. Une asymptote horizontale en $\pm\infty$ d'équation $y=0$.

   Enfin, comme $k(x) = (x^2+x+1)^{-1/2}$, $k'(x) = -\dfrac{1}{2}(2x+1)(x^2+x+1)^{-3/2} = \dfrac{-2x-1}{2(x^2+x+1)^{3/2}}$.

7. l est définie si $x \geq 0$ et si $3-\sqrt{x} > 0 \Rightarrow 9 > x$. Donc $\mathcal{D}_l = [0,9[$ et l est continue sur $[0,9[$, dérivable sur $]0,9[$ (d'après les propriétés des fonctions logarithme et racine carrée).

   $l(0) = \ln(3)$ (pas de limite ici car l est continue en 0) et $\lim\limits_{x\to 9^-} l(x) = -\infty$. Une asymptote verticale d'équation $x=9$. Pas d'asymptote horizontale.

   Enfin, $l'(x) = \dfrac{-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{3-\sqrt{x}} = \dfrac{-1}{6\sqrt{x}-2x} = \dfrac{1}{2x-6\sqrt{x}}$.

8. $m(x) = x^{1/x} = \exp\left(\dfrac{\ln(x)}{x}\right)$ est définie si $x>0$ et $x\neq 0$. Donc $\mathcal{D}_m =]0,+\infty[$ et m est continue et dérivable sur $\mathcal{D}_m$.

   $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(x)}{x} = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+} m(x) = 0$ par composition par exp.

   $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$ par croissances comparées donc $\lim\limits_{x\to+\infty} m(x) = 1$ par composition par exp.

   Pas d'asymptote verticale. Une asymptote horizontale en $+\infty$ d'équation $y=1$.

   Enfin, $m'(x) = \left(\dfrac{1-\ln(x)}{x^2}\right)\exp\left(\dfrac{\ln(x)}{x}\right)$.

9. $n(x) = (3-x)^{\ln(x)} = e^{\ln(x)\ln(3-x)}$ est définie si $x>0$ et $3-x>0$. Donc $\mathcal{D}_n =]0,3[$ et n est continue et dérivable sur $\mathcal{D}_n$.

   $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x)\ln(3-x) = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+} n(x) = 0$ par composition par exp.

   $\lim\limits_{x\to 3^-} \ln(x)\ln(3-x) = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 3^-} n(x) = 0$ par composition par exp.

   Pas d'asymptote verticale ou horizontale.

   Enfin, $n'(x) = \left(\dfrac{\ln(3-x)}{x} - \dfrac{\ln(x)}{3-x}\right)e^{\ln(x)\ln(3-x)}$.

Exercice 3

1. $f(x)$ est définie si $x>0$ et si $x\neq 0$. Donc $\mathcal{D}_f =]0,+\infty[$.

2. En 0 : $\lim\limits_{x\to 0^+} (\ln(x)+2x^2+2 = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} x = 0^+$. Donc par quotient, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$. En particulier $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote verticale d'équation $x=0$.

   En $+\infty$: $f(x) = \dfrac{\ln(x)+2x^2+2}{x} = \dfrac{\ln(x)}{x} + 2x + \dfrac{2}{x}$. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$ (par croissance comparée), $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{x} = 0$. Donc par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

3. (a) f est continue et dérivable sur $]0,+\infty[$ comme quotient de deux fonctions continues et dérivables sur $]0,+\infty[$ dont le dénominateur ne s'annule pas. On a, pour tout $x \in]0,+\infty[$:

$$f'(x) = \frac{(\frac{1}{x}+4x)\times x - (\ln(x)+2x^2+2)\times 1}{x^2} = \frac{2x^2-\ln(x)-1}{x^2}.$$

(b) g est continue et dérivable sur $]0,+\infty[$ car c'est la somme de fonctions continues et dérivables sur $]0,+\infty[$. On a, pour tout $x \in]0,+\infty[$,

$$g'(x) = 4x - \frac{1}{x} = \frac{4x^2-1}{x} = \frac{(2x-1)(2x+1)}{x}.$$

On en déduit le tableau de variation de g :

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$	$\|$	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$\|$	$\searrow$	$g(\frac{1}{2})$	$\nearrow$	

(c) D'après le tableau de variations de g, on a, pour tout $x \in]0,+\infty[$, $g(x) \geq g(\frac{1}{2})$. Donc g admet un minimum sur $]0,+\infty[$ atteint en $\frac{1}{2}$. Et on a :

$$g(\frac{1}{2}) = 2 \times \frac{1}{4} - \ln(\frac{1}{2}) - 1 = \frac{1}{2} + \ln(2) - 1 = \ln(2) - \frac{1}{2} > 0.$$

Donc ce minimum est strictement positif et g est strictement positive sur $]0,+\infty[$.

(d) On remarque que, pour tout $x \in]0,+\infty[$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$. Comme g est strictement positive sur $]0,+\infty[$ (d'après la question précédente), on en déduit que f' est strictement positive sur $]0,+\infty[$.
On peut alors en déduire le tableau de variation de f :

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	$\|$	$+$	
$f(x)$	$\|$ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

4. (a) Pour tout $x > 0$, on a :

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{\ln(x) + 2x^2 + 2}{x^2} = \frac{\ln(x)}{x^2} + 2 + \frac{2}{x^2} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 2,$$

par croissances comparées. Donc $a = 2$.

(b) Pour tout $x > 0$, on a :

$$f(x) - 2x = \frac{\ln(x) + 2x^2 + 2}{x} - 2x = \frac{\ln(x) + 2}{x} = \frac{\ln(x)}{x} + \frac{2}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

par croissances comparées. Donc $b = 0$.

(c) D'après la question précédente, $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - 2x) = 0$. Donc $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote oblique Δ d'équation $y = 2x$ au voisinage de $+\infty$.

(d) Pour tout $x > 0$, $f(x) - 2x = \frac{\ln(x)+2}{x}$. On a :

$$\ln(x) + 2 \geq 0 \Leftrightarrow \ln(x) \geq -2 \Leftrightarrow x \geq e^{-2}.$$

On fait un tableau de signes :

x	0		e^{-2}		$+\infty$
$\ln(x) + 2$		$-$	0	$+$	
x			$+$		
$f(x) - 2x$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

Donc $\mathcal{C}_f$ est en dessous de Δ sur $]0, e^{-2}]$ et au dessus de Δ sur $[e^{-2}, +\infty[$ ($\mathcal{C}_f$ et Δ se coupent en e^{-2}).

5. On obtient le tracé suivant :