AP 1

Suites récurrentes d'ordre 1 - Suites implicites

Suites récurrentes d'ordre 1

Exercice 1

On étudie la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = \frac{5}{2} \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 1 + \frac{4}{1+u_n}.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini et $u_n > 0$.
2. Calculer les premiers termes de la suite. Est-elle monotone ?
3. Étudier la fonction $f(x) = 1 + \dfrac{4}{1+x}$ sur $\mathbb{R}_+$.
   Représenter f et les premiers termes de la suite.
4. Déterminer les limites possibles de la suite (u_n).
5. Soient (v_n) et (w_n) les suites définies par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$.
   (a) Déterminer la fonction g telle que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = g(v_n)$ et $w_{n+1} = g(w_n)$.
   (b) Étudier les variations de g sur $\mathbb{R}_+$ et déterminer le signe de $g(x) - x$.
   Montrer que les deux intervalles $[0, \sqrt{5}[$ et $[\sqrt{5}, +\infty[$ sont stables par g.
   (c) En déduire que les deux suites (v_n) et (w_n) sont convergentes. Vers quelle limite ?
   (d) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

Exercice 2

1. Donner un exemple d'une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ pour laquelle il existe un réel K élément de $]0,1[$ tel que, pour tout coulpe (x, y) de réels, on ait :

$$|f(x) - f(y)| \leq K \times |x - y|. \qquad (*)$$

On considère pour toute la suite une fonction f vérifiant la condition précédente.
On dit que f est K-contractante.

2. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
3. À l'aide de la relation $(*)$, montrer par l'absurde que l'équation $f(x) = x$ admet au plus une solution.
4. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la donnée du réel u_0 et la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ valable pour tout entier naturel n.
   (a) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a :

$$|u_{n+1} - u_n| \leq K^n |u_1 - u_0|.$$

   (b) Établir la convergence de la série de terme général $u_{n+1} - u_n$, puis en déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. On note a sa limite.
   (c) Conclure que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution.

5. On désigne par n et p des entiers naturels (avec $p \geq 1$).

   (a) Justifier que l'on a : $\displaystyle\sum_{i=n}^{n+p-1} |u_{i+1} - u_i| \leq \sum_{i=n}^{n+p-1} K^i \times |u_1 - u_0|$.

   (b) En déduire l'inégalité :

   $$|u_{n+p} - u_n| \leq K^n \times \frac{1-K^p}{1-K}\ |u_1 - u_0|\,.$$

   (c) Établir enfin l'inégalité suivante :

   $$|a - u_n| \leq \frac{K^n}{1-K} \times |u_1 - u_0|\,.$$

6. *Étude d'un exemple :* on considère la fonction f définie par :

   $$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad f(t) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^t}.$$

   (a) Justifier que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, puis calculer $f'(t)$ et $f''(t)$ pour tout réel t.

   (b) Déterminer les variations de f' sur $\mathbb{R}$ et établir enfin l'inégalité :

   $$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \left|f'(t)\right| \leq \frac{1}{4}.$$

   (c) En déduire que f est $\dfrac{1}{4}$-contractante.

   (d) On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la donnée du réel u_0 et la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ valable pour tout entier naturel n.

   Montrer que cette suite est convergente. On note toujours a sa limite.

   (e) Compléter la fonction `Python` ci-dessous afin qu'elle renvoie, pour une valeur donnée de n, la valeur de u_n à l'appel de `suite(n)` :

```python
def suite(n):
    u = .....
    for k in range(1,n+1):
        u = .....
    return u
```

   (f) En s'appuyant sur le résultat de la question 5.(c), établir que u_n est une valeur approchée de a à moins de 10^{-3} près dès que n vérifie : $4^n \geq \dfrac{2000}{3}$

   (g) En déduire un programme `Python`, utilisant la fonction précédente, qui calcule la valeur approchée de a qui en résulte.

Suites implicites

Exercice 3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $f_n(x) = 1 - x - x^n$.

1. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ d'inconnue x admet une seule solution, notée u_n.

2. (a) Vérifier que u_n appartient à $]0, 1[$.
   (b) En déduire le signe de $f_{n+1}(u_n)$ puis établir que la suite (u_n) est croissante.
   (c) Conclure que la suite (u_n) converge et que sa limite appartient à $[0, 1]$.
   (d) Montrer par l'absurde que la limite de la suite (u_n) vaut 1.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $v_n = 1 - u_n$.
   (a) Justifier que v_n est strictement positif, puis montrer que $\ln(v_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} -nv_n$.
   (b) Établir que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln\left(\frac{-\ln(v_n)}{nv_n}\right)}{-\ln(v_n)} = 0$ et en déduire que : $\ln(v_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\ln(n)$.
   (c) Montrer enfin que : $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(n)}{n}$.

4. Pour les 5/2 - Donner la nature des séries de termes généraux v_n et v_n^2.

Exercice 4

Pour tout entier $k \geq 2$, on considère la fonction :

$$f_k(x) = \begin{cases} \dfrac{(\ln(x))^k}{x-1} & \text{si } x > 0 \text{ et } x \neq 1, \\ 0 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

1. Étude des fonctions f_k :
   (a) Soit $k \geq 2$. Démontrer que f_k est dérivable pour $x \neq 1$ et déterminer sa dérivée.
   (b) Démontrer que f_k est dérivable en 1 et déterminer $f_k'(1)$.
   (c) Soit $\varphi_k(x) = k(x-1) - x\ln(x)$. Étudier les variations de φ_k.
   (d) Démontrer que l'équation $\varphi_k(x) = 0$ admet une unique solution dans $]1, +\infty[$ notée a_k.
   (e) Donner le tableau de variation de f_k.
   On séparera les cas k pair et $k \geq 2$ et k impair et $k \geq 3$.

2. Étude asymptotique de la suite $(a_k)_{k\geq 2}$:
   (a) Démontrer que pour tout $k \geq 2$, $e^{k-1} \leq a_k \leq e^k$.
   En déduire la limite de $(a_k)_{k\geq 2}$.
   (b) Pour tout $k \geq 2$, on pose : $a_k = e^k(1 + b_k)$.
   Démontrer que b_k vérifie l'équation : $-ke^{-k} = (1 + b_k)\ln(1 + b_k)$.
   (c) Démontrer que $\ln(1 + b_k) \geq -ke^{1-k}$.
   En déduire la limite de la suite (b_k) et $b_k \sim -ke^{-k}$.
   (d) En déduire que $a_k = e^k - k + o(k)$ lorsque $k \to +\infty$.
