AP 2

# Calcul matriciel

## Exercice 1

On considère une matrice carrée d'ordre 3 :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

De plus, on considère, pour tout nombre réel $a$, la matrice carrée réelle d'ordre 3 :

$$M_a = \begin{pmatrix} a & 2 & 1 \\ 0 & a-1 & 2 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}.$$

1. (a) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de $J$.
   (b) Montrer que $J$ est diagonalisable. Déterminer une matrice réelle diagonale $D$ d'ordre trois et une matrice réelle inversible $P$ d'ordre trois telles que $J = PDP^{-1}$.
   (c) En déduire que, pour tout nombre réel $a$, il existe une matrice réelle diagonale $D_a$ d'ordre trois, que l'on calculera, telle que $M_a = PD_aP^{-1}$.
   (d) Quel est l'ensemble des nombres réels $a$ tels que $M_a$ soit inversible ?

2. On se propose, dans cette question, de déterminer l'ensemble des nombres réels $a$ tels qu'il existe une matrice carrée réelle d'ordre trois vérifiant $X^2 = M_a$.

   Soient $a$ un nombre réel et $X$ une matrice carrée réelle d'ordre trois tels que $X^2 = M_a$.

   (a) Montrer que $X$ commute avec $M_a$, puis que $X$ commute avec $J$.
   (b) Déduire de la question précédente que tout vecteur propre de $J$ est vecteur propre de $X$.
   (c) Établir qu'il existe une matrice réelle diagonale $\Delta$ d'ordre trois telle que $X = P\Delta P^{-1}$ et montrer : $\Delta^2 = D_a$.
   (d) En déduire : $a \geq 2$.
   (e) Réciproquement, montrer que, pour tout nombre réel $a$ supérieur ou égal à 2, il existe une matrice carrée réelle $X$ d'ordre trois telle que $X^2 = M_a$.
   (f) Conclure.

---

## Exercice 2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A$ la matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ définie par :

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -6 & 0 \\ 6 & 7 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Cet exercice a pour but de déterminer toutes les matrices $X \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant l'équation :

$$(E) : \quad X^n = A^n.$$

1. (a) Déterminer les valeurs propres de $A$.
   (b) Déterminer une base $(u, v, w)$ de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de $A$.
   (c) Montrer que $(u, v, w)$ est aussi une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de $A^n$.

2. (a) Montrer que si $X$ est une solution de l'équation $(E)$, alors $XA^n = A^nX$.
   (b) En déduire que $(u, v, w)$ est aussi une base de vecteurs propres de $X$.
   (c) En déduire une matrice $P$ inversible telle que les matrices $D = P^{-1}AP$ et $Y = P^{-1}XP$ soient toutes les deux diagonales.

3. (a) Montrer que l'équation $(E)$ est équivalente à l'équation $Y^n = D^n$.
   (b) En déduire toutes les solutions de l'équation $(E)$.
   On étudiera séparément les cas $n$ pair et $n$ impair.

---

## Exercice 3

Dans tout l'exercice, $n$ désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1. (a) Étudier, suivant la parité de $n$, les variations sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f_n(x) = x^{n+1} + x^n$.
   (b) Montrer que dans tous les cas $f_n\left(-\dfrac{n}{n+1}\right) < 2$.
   (c) Calculer $f_n(1)$ et en déduire, suivant la parité de $n$, le nombre de solutions de l'équation $x^{n+1} + x^n = 2$ d'inconnue $x$.

2. Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est diagonalisable et déterminer deux matrices $P$ inversible et $D$ diagonale (avec $d_{1,1} < d_{2,2}$) telles que $A = PDP^{-1}$.

3. On considère l'équation matricielle d'inconnue $X \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ :
$$(E_n) \quad X^{n+1} + X^n = A.$$
   (a) Montrer que la résolution de cette équation peut se ramener de manière équivalente à la réalisation de l'équation d'inconnue $Y \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ :
$$(E'_n) \quad Y^{n+1} + Y^n = D.$$
   (b) Soit $Y$ une solution de $(E'_n)$. Montrer que $DY = YD$.
   (c) On pose $Y = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Déduire de la question précédente que $b = c = 0$.
   (d) Quelles sont les valeurs possibles de $a$ ?
   (e) Discuter, suivant la parité de $n$, le nombre de solutions de l'équation $(E_n)$.

4. On note $\alpha$ la solution négative de l'équation numérique $x^4 + x^3 = 2$.
   Déterminer les solutions de l'équation $(E_3)$ à l'aide de $\alpha$.

---