AP 4

Séries réelles

Exercice 1 (Sur la série harmonique)

On s'intéresse au problème suivant :

> On suppose avoir une infinité de kaplas (petits pavés en bois de 12 cm de long et de 8 mm d'épaisseur) à notre disposition. En partant d'une tour bien droite, et en poussant intelligemment les kaplas, jusqu'où peut-on faire pencher cette pile avant qu'elle ne tombe ?

La réponse de ce problème est à découvrir dans cette vidéo. On cherche ici à retrouver les résultats qui y sont exposés. Considérons pour cela la série harmonique $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. **Divergence de la série harmonique.**

   Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}$. En déduire que la série harmonique diverge.

2. **Équivalent de H_n lorsque $n \to +\infty$.**

   (a) Justifier l'inégalité suivante pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: $\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{k}$.

   (b) En déduire que pour tout entier $n \geq 2$, on a :

   $$H_n - 1 \leq \int_1^n \frac{1}{t} dt \leq H_{n-1}.$$

   (c) Donner un équivalent de H_n lorsque $n \to +\infty$.

3. **Recherche d'un développement asymptotique de H_n.**

   Posons $\gamma_n = H_n - \ln(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, γ_n appartient à l'intervalle $[0, 1]$.

   (b) Montrer que $\ln(1 + x) \leq x$ pour tout $x > -1$.
   En déduire que $\gamma_n - \gamma_{n-1} \leq 0$ pour tout $n \geq 2$.
   Conclure que (γ_n) converge vers un réel $\gamma \in \mathbb{R}$.
   Ce réel γ est appelé la constante d'Euler ($\gamma \simeq 0,577$).

   (c) En déduire que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1)$.

4. **Programmation.**

   (a) Écrire en langage `Python` une fonction `kaplas` qui à n le nombre de kaplas à disposition, renvoie le réel p égal au maximum de l'inclinaison de la pile de n kaplas.

   (b) Vérifier le résultat pour une tour de kaplas haute comme la tour Eiffel (324 m) ? Et pour une tour de kaplas de votre taille ?

Exercice 2 (Sur la série harmonique alternée)

Considérons la série harmonique alternée

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

On note $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de ses sommes partielles.

1. **Étude de la convergence.**
   (a) La série harmonique alternée est-elle absolument convergente ?
   (b) Montrer que les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes, puis en déduire qu'elles convergent vers une même limite notée S.
   (c) En déduire que la série harmonique alternée converge et que l'on a $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

2. **Calcul de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.**
   (a) Écrire en langage `Python` une fonction `approx` qui, étant donné un réel $\varepsilon > 0$, retourne une valeur approchée de S à ε près.
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_{2n} = H_{2n} - H_n$ (où H_n a été défini à l'exercice précédent).
   (c) En déduire la valeur de S en utilisant le développement asymptotique de la série harmonique obtenu dans l'exercice précédent.

Exercice 3 (Critère des séries alternées)

Soit (v_n) une suite réelle décroissante et de limite nulle.

On pose, pour tout entier naturel n, $u_n = (-1)^n v_n$ et $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$.

1. Montrer que les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes.
2. En déduire que la série de terme général u_n est convergente.
3. On note S la somme de cette série. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n}$.
4. Montrer enfin que : $\forall n \in \mathbb{N},\ |S - S_n| \leq v_{n+1}$.
5. Étudier la convergence/convergence absolue des séries suivantes :

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n \ln(n)}{n} \qquad \text{et} \qquad \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}.$$

Exercice 4 (Critère de d'Alembert)

Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs telle que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell \in [0, +\infty]$.

1. On suppose dans cette question que $\ell < 1$.
   (a) On pose $q = \dfrac{\ell+1}{2}$. Montrer que : $\ell < q < 1$.
   (b) Justifier qu'il existe un rang N tel que : $\forall n \geq N,\ \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq q$.
   (c) Montrer que : $\forall n \geq N,\ u_n \leq u_N q^{n-N}$.

(d) En déduire que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est convergente.

(e) Quelle est la nature de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{n!}{n^n}$?

2. On suppose maintenant que $\ell > 1$.

(a) En adaptant le raisonnement de la première question, montrer que $\sum_{n\geq 0} u_n$ est divergente.

(b) Quelle est la nature de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{2^n}{n^2}$?

3. Justifier que, si $\ell = 1$, on ne peut pas conclure sur la nature de la série $\sum_{n\geq 0} u_n$.
