AP 7

Chaînes de Markov

Exercice 1

Une matrice est dite **positive** si tous ses coefficients sont des nombres réels positifs ou nuls; elle est dite **strictement positive** si tous ses coefficients sont des nombres réels strictement positifs.

Un vecteur colonne $V \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est dit **de probabilité** si V est positif et si $\|V\| = \sum_{i=1}^{n} |v_i| = 1$.

Une matrice $Q = (Q(i,j))_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq n}} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est dite **stochastique par colonne** si elle est positive et si

$$\forall 1 \leq j \leq n, \quad \sum_{i=1}^{n} Q(i,j) = 1.$$

On note $St_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices stochastiques par colonne de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1. (a) $St_n(\mathbb{R})$ est-il un espace vectoriel ?
   (b) Soient A et B deux matrices de $St_n(\mathbb{R})$. Montrer que $AB \in St_n(\mathbb{R})$.
   (c) Soit A une matrice de $St_n(\mathbb{R})$. Montrer que $A^k \in St_n(\mathbb{R})$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

2. Soit Q une matrice de $St_n(\mathbb{R})$.
   (a) Soit U le vecteur colonne à n lignes ne comportant que des 1 et Q une matrice de $St_n(\mathbb{R})$. Calculer ${}^tQU$.
   (b) Montrer qu'une matrice et sa transposée ont les mêmes valeurs propres et des sous-espaces propres de même dimension.
   (c) *Question supplémentaire (rien à voir avec le reste de l'exercice)* :
   Montrer qu'une matrice A est diagonalisable si et seulement si ${}^tA$ est diagonalisable.
   (d) Déduire des questions 2.(a) et 2.(b) que 1 est valeur propre de Q.

3. Soit Q une matrice de $St_n(\mathbb{R})$.
   (a) Vérifier que pour tout vecteur $V \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ on a :
   $$\|QV\| \leq \|V\|$$
   avec de plus $\|QV\| = \|V\|$ lorsque les v_i sont tous de même signe.
   (b) En déduire que pour toute valeur propre réelle λ de Q, on a $|\lambda| \leq 1$.

4. On suppose dans cette question que les coefficients de la première ligne de Q sont tous strictement positifs. Nous allons prouver qu'il existe un vecteur propre de Q, associé à la valeur propre 1 qui est un vecteur de probabilité.
   (a) Soit X un vecteur propre de Q associé à la valeur propre 1.
   Justifier qu'il existe un réel λ tel que la matrice colonne $V = \lambda X$ vérifie $QV = V$, $\|V\| = 1$ et l'un au moins des coefficients de V est strictement positif.
   (b) Nous allons prouver par l'absurde que tous les coefficients de V sont positifs. Supposons donc que l'un au moins des coefficients de V est strictement négatif.
      i. Montrer que : $\left|\sum_{j=1}^{n} Q(1,j)v_j\right| < \sum_{j=1}^{n} Q(1,j)\,|v_j|$.
      ii. Montrer que, pour tout $i \in [\![2,n]\!]$: $\left|\sum_{j=1}^{n} Q(i,j)v_j\right| \leq \sum_{j=1}^{n} Q(i,j)\,|v_j|$.

iii. Justifier à l'aide de la question 4.(a) que : $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} Q(i,j)v_j = v_i$.

iv. Déduire alors des questions précédentes l'inégalité :

$$\|V\| < \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} Q(i,j)\,|v_j|$$

v. Aboutir à une contradiction à partir de cette inégalité.

vi. Conclure.

Exercice 2

Dans une élection à venir, deux candidats A et B se présentent.
Un groupe d'électeurs est composé de m individus, avec $m \geq 2$.
Initialement, au jour appelé "jour 0", le nombre d'individus préférant le candidat A vaut a (il y en a donc $m-a$ préférant le candidat B). Ensuite, chaque jour, un des individus au hasard dans le groupe en rencontre un autre, au hasard également, et il lui parle des élections. Si leurs intentions de vote diffèrent, il le convainc de voter comme lui.

Pour tout entier naturel n, on note X_n le nombre d'individus du groupe ayant l'intention de voter pour le candidat A le soir du n-ième jour. Ainsi, X_n est une variable aléatoire à valeurs dans $[\![0, m]\!]$. On remarque que X_0 est une variable aléatoire certaine : $P(X_0 = a) = 1$.

Partie I - Un cas particulier : $m = 4$

Dans cette partie, on étudie le cas d'un groupe formé de quatre électeurs.

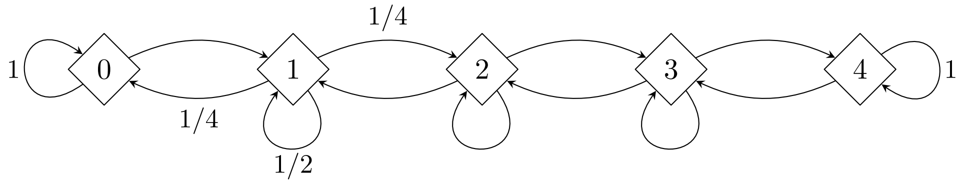
1. Soit i et j deux entiers dans $[\![0, 4]\!]$. On note $p_{i,j}$ la probabilité pour qu'il y ait exactement j personnes dans le groupe ayant l'intention de voter pour A un jour donné, sachant qu'il y en avait i la veille.

   (a) Justifier : $p_{0,0} = p_{4,4} = 1$.

   (b) Justifier : si i et j dans $[\![0, 4]\!]$ sont tels que $|i-j| \geq 2$, alors $p_{i,j} = 0$.

   (c) Établir : $p_{1,0} = p_{1,2} = \frac{1}{4}$ et $p_{1,1} = \frac{1}{2}$.

   (d) De la même façon, donner pour tout $(i,j) \in [\![0, 4]\!]^2$ la probabilité $p_{i,j}$.
   On présentera les résultats sur le diagramme suivant, à reproduire et à compléter, et on justifiera quelques cas.



2. On définit la matrice $M = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 & 0 \\ 1/4 & 1/3 & 1/4 \\ 0 & 1/3 & 1/2 \end{pmatrix}$, et pour tout entier naturel n, la matrice colonne $U_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 1) \\ P(X_n = 2) \\ P(X_n = 3) \end{pmatrix}$.

   (a) Pour tout entier naturel n, établir la relation : $U_{n+1} = MU_n$.
   En déduire pour tout entier naturel n, l'égalité $U_n = M^n U_0$.

(b) Montrer que M admet trois valeurs propres distinctes α, β et γ, vérifiant $0 \leq \alpha < \beta < \gamma < 1$.

Justifier qu'il existe une matrice carrée P d'ordre 3 inversible, que l'on ne demande pas de préciser, et D une matrice diagonale d'ordre 3, à préciser, telles que $P^{-1}MP = D$.

(c) En déduire que pour tout $k \in \{1, 2, 3\}$, la suite $\big(P(X_n = k)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est une combinaison linéaire des trois suites $\big(\alpha^n\big)_{n\in\mathbb{N}}$, $\big(\beta^n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\big(\gamma^n\big)_{n\in\mathbb{N}}$.

(d) Montrer que pour tout $k \in \{1, 2, 3\}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n = k) = 0$.

3. Établir : $\lim\limits_{n\to+\infty} \big[P(X_n = 0) + P(X_n = 4)\big] = 1$. Comment interpréter ce résultat ?

Partie II - Le cas général

On revient dans cette partie au cas général d'un groupe de m électeurs.
On note $\pi_{n,k} = P(X_n = k)$ la probabilité pour qu'il y ait exactement k électeurs envisageant de voter pour A à l'issue du n-ième jour.

4. Soit n un entier naturel.

(a) Établir les trois relations :

$$\forall k \in [\![0, m-1]\!], \quad P_{(X_n=k)}(X_{n+1} = k+1) = \frac{k(m-k)}{m(m-1)} \;;$$

$$\forall k \in [\![1, m]\!], \quad P_{(X_n=k)}(X_{n+1} = k-1) = \frac{k(m-k)}{m(m-1)} \;;$$

$$\forall k \in [\![1, m-1]\!], \quad P_{(X_n=k)}(X_{n+1} = k) = 1 - \frac{2k(m-k)}{m(m-1)}.$$

(b) En déduire la relation, si $k \in [\![1, m-1]\!]$:

$$\pi_{n+1,k} = \frac{(k-1)(m+1-k)\pi_{n,k-1} + [m(m-1) - 2k(m-k)]\pi_{n,k} + (k+1)(m-1-k)\pi_{n,k+1}}{m(m-1)}.$$

5. (a) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n et pour tout $k \in [\![1, m-1]\!]$,

$$\pi_{n,k} \leq \left(\frac{m(m-1) - 2}{m(m-1)}\right)^n.$$

(b) En déduire, pour tout $k \in [\![1, m-1]\!]$, la limite de $\pi_{n,k}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

6. On définit l'événement V_A (respectivement V_B) suivant : "au bout d'un certain nombre de jours, tous les individus du groupe ont l'intention de voter pour A (respectivement pour B)".

(a) Montrer que $P(V_A) = \lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n = m)$ et $P(V_B) = \lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n = 0)$.

(b) Montrer que $P(V_A) + P(V_B) = 1$.
Que signifie ce résultat ?

7. Pour tout entier naturel n, on pose $Z_n = X_{n+1} - X_n$.

(a) Justifier : $Z_n(\Omega) = \{-1, 0, 1\}$.

(b) Exprimer $P(Z_n = 1)$ en fonction des probabilités $\pi_{n,k}$ avec $k \in [\![1, m-1]\!]$.

(c) Comparer $P(Z_n = -1)$ et $P(Z_n = 1)$.

(d) En déduire que $E(Z_n) = 0$.

(e) Montrer que la suite $\Big(E\left(X_n\right)\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante et déterminer cette constante en fonction de a.

8. Montrer que $P\big(V_A\big) = \dfrac{a}{m}$ et interpréter ce résultat.