AP 8

Espaces vectoriels

Exercice 1

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un même espace vectoriel E.

1. Intersection de sous-espaces vectoriels :
   (a) Montrer que $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E.
   (b) On suppose dans cette question que $E = \mathbb{R}^3$, $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - z = 0\}$ et $G = \{(a, a + b, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$. On admet que F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E. Déterminer une base de F, de G et de $F \cap G$.
2. Réunion de sous-espaces vectoriels :
   (a) On suppose dans cette question que $E = \mathbb{R}^2$, $F = Vect((1, 0))$ et $G = Vect((0, 1))$. Montrer que $F \cup G$ n'est pas un sous-espace vectoriel de E.
   (b) Montrer que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.
3. Somme de sous-espaces vectoriels :
   On note $F + G$ l'ensemble définit par :
$$F + G = \{x + y \mid x \in F \text{ et } y \in G\}.$$
   (a) Montrer que $F + G$ est un sous-espace vectoriel de E.
   (b) Montrer que $F + G$ contient F et G.
   (c) Soit H un sous-espace vectoriel de E contenant F et G. Montrer que $F + G \subset H$.
   On dit que $F + G$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant F et G.
   (d) Montrer que $G \subset F$ si et seulement si $F + G = F$.
   (e) Montrer que $F \cap G = F + G$ si et seulement si $F = G$.
   (f) Montrer que, si $F \cap G = \{0_E\}$, alors tout vecteur $u \in F + G$ se décompose de manière unique sous la forme $u = f + g$ où $f \in F$ et $g \in G$.
   (g) On suppose dans cette question que $E = \mathbb{R}^3$, $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - z = 0\}$ et $G = \{(a, a + b, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$. On admet que F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E. Déterminer une base de $F + G$ puis vérifier que :
$$dim(F + G) = dim(F) + dim(G) - dim(F \cap G).$$
   On pourrait démontrer que cette dernière relation est vraie quelques soient F et G deux sous-espaces vectoriels de dimension finie.

Exercice 2

On considère l'ensemble $E = \left\{M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \mid M\,{}^tM = {}^tMM\right\}$.

1. Montrer que les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ appartiennent à E.
2. Calculer $A + B$ puis sa transposée. Que peut-on en déduire pour E ?
3. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur les réels a, b, c, d pour que la matrice M appartienne à l'ensemble E.

4. En déduire deux formes possibles des matrices de E.
5. En déduire que E est la réunion de deux sous-espaces vectoriels de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ dont on donnera une base.

Exercice 3

On note $\mathscr{S}_3(\mathbb{R})$ et $\mathscr{A}_3(\mathbb{R})$ les ensembles suivants :

$$\mathscr{S}_3(\mathbb{R}) = \{M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \mid {}^tM = M\} \qquad \text{et} \qquad \mathscr{A}_3(\mathbb{R}) = \{M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \mid {}^tM = -M\}.$$

1. Montrer que $\mathscr{S}_3(\mathbb{R})$ et $\mathscr{A}_3(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
2. Déterminer une base et la dimension de $\mathscr{S}_3(\mathbb{R})$ et de $\mathscr{A}_3(\mathbb{R})$.
3. Déterminer $\mathscr{S}_3(\mathbb{R}) \cap \mathscr{A}_3(\mathbb{R})$.
4. En utilisant les résultats démontrés dans l'exercice 1, montrer que : $\mathscr{M}_3(\mathbb{R}) = \mathscr{S}_3(\mathbb{R}) + \mathscr{A}_3(\mathbb{R})$.
5. En déduire que toute matrice $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ se décompose de manière unique comme une somme d'une matrice $S \in \mathscr{S}_3(\mathbb{R})$ et d'une matrice $A \in \mathscr{A}_3(\mathbb{R})$.
6. Expliciter les matrices S et A à l'aide de M.

Exercice 4

On considère les matrices suivantes :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. On note $\mathscr{N}$ le sous-ensemble de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ défini par :

$$\mathscr{N} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

   (a) Montrer que $\mathscr{N}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. En déterminer une base et la dimension.

   (b) Montrer que les matrices de $\mathscr{N}$ ne sont pas inversibles.

   (c) Montrer que toute matrice non nulle de $\mathscr{N}$ n'est pas diagonalisable.

   (d) Montrer que $\mathscr{N}$ est stable pour le produit matriciel, c'est-à-dire que

$$\forall (A, B) \in \mathscr{N}^2, \quad AB \in \mathscr{N}.$$

   (e) Montrer que les matrices appartenant à $\mathscr{N}$ commutent deux à deux, c'est-à-dire que

$$\forall (A, B) \in \mathscr{N}^2, \quad AB = BA.$$

   (f) Montrer que le produit de trois matrices appartenant à $\mathscr{N}$ est toujours nul, c'est-à-dire que

$$\forall (A, B, C) \in \mathscr{N}^3, \quad ABC = 0.$$

2. On note $\mathscr{J}$ le sous-ensemble de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ défini par : $\mathscr{J} = \{I + N \mid N \in \mathscr{N}\}$.

   (a) L'ensemble $\mathscr{J}$ est-il un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$?

   (b) Montrer que $\mathscr{J}$ est stable pour le produit matriciel.

3. On considère l'application $E : \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ définie par :
$$\forall A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}), \quad E(A) = I + A + \frac{1}{2}A^2.$$
   (a) L'application E est-elle un endomorphisme de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$?
   (b) Montrer que $E(\mathscr{N}) \subset \mathscr{J}$.
   (c) Montrer que :
$$\forall (A, B) \in \mathscr{N}, \quad E\,(A + B) = E\,(A) \times E\,(B)\,.$$
   (d) En déduire que : $\forall A \in \mathscr{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $(E\,(A))^n = E\,(n\,A)$.
   (e) En déduire également que, pour toute matrice $A \in \mathscr{N}$, $E\,(A)$ est inversible et que sont inverse est $E\,(-A)$.

4. On considère l'application $L : \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ définie par :
$$\forall A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}), \quad L(A) = A - I - \frac{1}{2}(A - I)^2.$$
   (a) L'application L est-elle un endomorphisme de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$?
   (b) Montrer que $L(\mathscr{J}) \subset \mathscr{N}$.
   (c) Soit $N \in \mathscr{N}$. Calculer $(L \circ E)(N)$ et $(E \circ L)(I + N)$. Que peut-on en déduire ?
