Chapitre 1

Compléments sur les suites réelles

Compétences attendues.

- ✓ Savoir montrer qu'une suite est négligeable devant une autre.
- ✓ Savoir trouver un équivalent à l'aide des opérations usuelles ou des équivalents classiques.
- ✓ Déterminer la limite d'une suite à l'aide des équivalents.
- ✓ Savoir étudier une suite récurrente d'ordre 1 (construction graphique, existence, variations, convergence...).
- ✓ Savoir étudier une suite implicite (existence, variations...).

Anthony Mansuy
Professeur de Mathématiques en deuxième année de CPGE filière ECG au Lycée Clemenceau (Reims)
Page personnelle : `http://anthony-mansuy.fr`
E-mail : `mansuy.anthony@hotmail.fr`

Introduction

Définition.

Une suite réelle est une fonction u définie sur les entiers naturels et à valeurs réelles :

$$u : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & u(n) \end{array} \right. .$$

La suite u est également notée (u_n), où $u_n = u(n)$ désigne le terme d'indice n de la suite.

Attention.

On fera bien attention à ne pas confondre :

- u_n : le terme d'indice n de la suite (u_n),
- (u_n) : la suite dont le terme d'indice n est u_n.

Comme une suite est une fonction définie sur un ensemble discret (les entiers naturels) et non sur un ensemble continu (un intervalle par exemple), il n'y a pas de notions de continuité, de dérivabilité... En revanche, les notions de variations, de limite (lorsque n tend vers $+\infty$), de représentation graphique ont toujours un sens pour les suites.

Dans l'étude des suites, on s'intéresse donc toujours aux mêmes notions : existence de la suite, variations, limite (lorsque n tend vers $+\infty$) et éventuellement, équivalent de la suite (lorsque n tend vers $+\infty$, voir la deuxième partie de ce chapitre).

Il existe plusieurs manières de définir une suite :

- **Suites définies explicitement :** Une suite explicite est une suite (u_n) dont on a directement l'expression de u_n en fonction de n.

  Par exemple, la suite (u_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{1}{n+1}$.

  L'intérêt d'avoir une suite sous forme explicite est double :

  – On peut calculer facilement le terme d'indice n de la suite.
  – On peut déterminer directement la limite de la suite à l'aide de son expression.

  Cependant, les suites peuvent être définies autrement et il n'est pas toujours possible de les mettre sous forme explicite.

- **Suites définies par récurrence :** Une suite récurrente d'ordre $p \geq 1$ est une suite (u_n) dont on donne les p premiers termes et un procédé (une relation de récurrence) permettant de calculer u_{n+p} à partir des p termes précédents $u_{n+p-1}, u_{n+p-2}, \ldots, u_{n+1}, u_n$.

  Par exemple :

  – La suite (u_n) définie par $u_0 = 4$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{5 + u_n}$ est une suite récurrente d'ordre 1.
  – La suite (u_n) définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_n + \ln(u_{n+1})$ est une suite récurrente d'ordre 2.

  Nous étudierons les suites récurrentes d'ordre 1 dans la deuxième partie de ce chapitre.

- **Suites définies implicitement :** Une suite implicite est une suite (u_n) dont chaque terme u_n est l'unique solution d'une certaine équation dépendant de n. L'existence et l'unicité des solutions de ces équations sont assurées par le théorème de la bijection, mais on ne connait pas leurs valeurs en général.

  Par exemple :

  – La suite (u_n) dont le terme général u_n est l'unique solution de l'équation $x + \ln(x) = n$.
  – La suite (u_n) dont le terme général u_n est l'unique solution de l'équation $x^n + 1 = nx$.

  Nous étudierons les suites implicites dans la troisième partie de ce chapitre.

- **Suites définies par une intégrale :** Une suite intégrale est une suite (u_n) dont chaque terme u_n s'exprime avec une intégrale.

  Par exemple, la suite (u_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \displaystyle\int_0^1 x^n e^{-x} dx$.

  Ce type de suites sera étudié au **Chapitre 10**.

1 Relations de comparaison des suites réelles

Dans toute cette partie, on suppose que les suites considérées ne s'annulent pas (de sorte que le quotient de deux suites est toujours bien défini).

1.1 Négligeabilité

Définition.

On dit que (u_n) est **négligeable** devant (v_n) et on note $u_n = o(v_n)$, s'il existe une suite (ε_n) telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \varepsilon_n v_n$. Ceci est équivalent à $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 0$. Autrement dit :

$$u_n = o(v_n) \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0.$$

Exemple. $n = o(n^2)$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{n^2} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

Remarques.

1. Si $u_n = o(v_n)$, on dit aussi que (v_n) est **prépondérante** sur (u_n). Cette définition donne un cadre rigoureux à la notion de "terme prépondérant" dans une somme.
2. On a : $u_n = o(1) \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{1} = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Attention.

La notation $o(w_n)$ ne désigne pas une suite particulière mais toute suite possédant la propriété d'être négligeable devant (w_n). Ainsi, $u_n = o(w_n)$ n'est pas une vraie égalité. Si $u_n = o(w_n)$ et $v_n = o(w_n)$, on n'a pas nécessairement $u_n = v_n$...
Par exemple, $\ln(n) = o(n)$ et $\sqrt{n} = o(n)$ et pourtant $\ln(n) \neq \sqrt{n}$.

Propriété 1 (Règles de calculs sur les petits-o)

Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites.

(1) Si $u_n = o(w_n)$ et $v_n = o(w_n)$, alors : $\forall(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda u_n + \mu v_n = o(w_n)$.

(2) Si $u_n = o(v_n)$, alors $u_n w_n = o(v_n w_n)$.

(3) Si $u_n = o(v_n)$ et $v_n = o(w_n)$, alors $u_n = o(w_n)$.

Preuve.

$\square$

Théorème 2 (Croissances comparées)

Soit $\alpha, \beta, q \in \mathbb{R}$ avec $\alpha, \beta > 0$ et $q > 1$. On a :

$$\ln(n)^\beta = o(n^\alpha), \qquad n^\alpha = o(q^n), \qquad q^n = o(n!), \qquad n! = o(n^n).$$

Remarque. En notant $u_n \ll v_n$ au lieu de $u_n = o(v_n)$, on a donc lorsque n tend vers $+\infty$:

$$\ln(n)^\beta \ll n^\alpha \ll q^n \ll n! \ll n^n.$$

Exercice. Montrer que : $\dfrac{\ln(n)}{n^3} = o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

1.2 Équivalence

Définition.

On dit que (u_n) est **équivalente** à (v_n) et on note $u_n \sim v_n$, s'il existe une suite (α_n) telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \alpha_n v_n$. Ceci est équivalent à $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1$. Autrement dit :

$$u_n \sim v_n \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1.$$

Exemple. $e^n + n^2 \sim e^n$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{e^n + n^2}{e^n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \dfrac{n^2}{e^n}\right) = 1$ (par croissances comparées).

Attention.

Ne pas confondre le symbole $\sim$ qui s'applique à des suites avec le symbole $\Leftrightarrow$ qui s'applique à des équations et signifie qu'elles ont les mêmes solutions. Les deux notions n'ont strictement rien à voir !

Remarques.

1. Si $u_n \sim v_n$, alors $v_n \sim u_n$. En effet :

   On dira donc simplement que (u_n) et (v_n) sont équivalentes.

2. Si $u_n \sim v_n$ et $v_n \sim w_n$, alors $u_n \sim w_n$. En effet :

Propriété 3 (Équivalents usuels)

Soit (u_n) une suite telle que $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$. Alors :

- $e^{u_n} - 1 \sim u_n$,
- $\ln(1 + u_n) \sim u_n$,
- $(1 + u_n)^\alpha - 1 \sim \alpha u_n$ pour $\alpha \neq 0$.

Preuve.

$\square$

Exercice. Déterminer des équivalents simples des termes suivants :

- $e^{1/n} - 1$

- $\ln\left(1 - \dfrac{1}{n^3}\right)$

- $\sqrt{1 + \dfrac{1}{n^2}} - 1$

Propriété 4 (Caractérisation de l'équivalence par les petits-o)

Soient (u_n) et (v_n) deux suites. On a :

$$u_n \sim v_n \quad \Leftrightarrow \quad u_n = v_n + o(v_n)$$

Preuve.

□

Remarque. La réciproque indique qu'on peut négliger les termes négligeables dans une somme :

$$u_n + o(u_n) \sim u_n.$$

Propriété 5 (Opérations sur les équivalents)

Soient (u_n), (v_n), (w_n) et (t_n) quatre suites telles que $u_n \sim w_n$ et $v_n \sim t_n$. Alors on a :

- $u_n v_n \sim w_n t_n$;
- $\dfrac{u_n}{v_n} \sim \dfrac{w_n}{t_n}$;
- pour tout $k \in \mathbb{N}$ **fixé**, $u_n^k \sim w_n^k$;
- si (u_n) et (w_n) sont à termes strictement positifs, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ **fixé**, $u_n^\alpha \sim w_n^\alpha$.

Preuve.

$\square$

Attention.

Ce sont les seules opérations autorisées pour les équivalents. Ainsi :

- On ne simplifie jamais une constante dans un équivalent : par exemple, $u_n \nsim 2u_n$ ou $u_n \nsim \dfrac{u_n}{2}$.
- $\sim$ n'est pas compatible avec la somme : par exemple, $n+1 \sim n+2$ et $-n \sim -n$, mais $1 \nsim 2$.
- $\sim$ n'est pas compatible avec la composition par la fonction exponentielle : par exemple, $n+1 \sim n$, mais $e^{n+1} \nsim e^n$ puisque $\dfrac{e^{n+1}}{e^n} = e \nrightarrow 1$.
- $\sim$ n'est pas compatible avec la composition par la fonction logarithme : par exemple, $1+\frac{1}{n} \sim 1+\frac{1}{n^2}$, mais $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \nsim \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$ puisque $\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} \sim \dfrac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} = n \nrightarrow 1$.

Remarque. Un moyen mnémotechnique pour se rappeler des opérations autorisées ou non est de remarquer que :

- $1 \times 1 = 1$, $\dfrac{1}{1} = 1$ et $1^\alpha = 1$, ce qui assure que les équivalents passent bien au produit, au quotient et à une puissance $\alpha > 0$;
- $1+1 = 2 \neq 1$, $\ln(1) = 0 \neq 1$ et $e^1 = e \neq 1$, ce qui confirme que les équivalents sont incompatibles avec la somme et la composition par exp ou ln.

Si vous avez le moindre doute sur un équivalent, faites le quotient (éventuellement au brouillon) et vérifiez qu'il tend bien vers 1 !

Exercice. Déterminer un équivalent de la suite (u_n) de terme général : $u_n = (2n-3)^2 \ln\left(\dfrac{n+3}{n+2}\right)$.

Propriété 6 (Signe de deux suites équivalentes)

Si deux suites (u_n) et (v_n) sont **équivalentes**, alors leurs termes u_n et v_n sont de **même signe** à partir d'un certain rang.

Preuve.

□

Théorème 7 (Équivalents et limites)

(1) Si (u_n) converge vers un réel ℓ **non nul**, alors $u_n \sim \ell$.

(2) Si deux suites (u_n) et (v_n) sont **équivalentes**, alors elles sont de **même nature**, c'est-à-dire :

- Si $u_n \sim v_n$ et si (v_n) converge vers un réel ℓ, alors (u_n) converge également vers ℓ.
- Si $u_n \sim v_n$ et si (v_n) diverge vers $\pm\infty$, alors (u_n) diverge également vers $\pm\infty$.

Preuve.

□

Méthode.

Pour obtenir la limite d'une suite (u_n) donnée sous forme explicite, on pourra :

1. *Déterminer un équivalent de chacun des facteurs apparaissant dans u_n.*
2. *Utiliser les opérations sur les équivalents pour obtenir un équivalent de u_n.*
3. *Calculer la limite de l'équivalent obtenu et en déduire la limite de (u_n).*

Exercice. Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{(3n+4)^3(8n^{-2}+2n^{-4})}{9n+10}$

2. $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n^2 e^n + n e^{2n}}{n^3 \ln(n) - n(\ln(n))^3}$

2 Suites récurrentes d'ordre 1

Dans cette partie, nous présentons diverses méthodes pour l'étude d'une suite (u_n) définie par une relation de récurrence d'ordre 1, c'est-à-dire satisfaisant :

$$\begin{cases} u_0 \in I \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

où f est une fonction définie sur un intervalle I.

Bien que les exercices seront souvent détaillés et qu'aucune connaissance théorique sur ces suites n'est exigée en ECG, il est utile de connaitre les différentes situations que l'on peut rencontrer, et de savoir comment mener l'étude d'une telle suite selon les cas.

2.1 Construction graphique

Afin d'avoir une idée du comportement de la suite, ce qui est très utile pour ensuite mener son étude, on commencera par visualiser graphiquement ses premiers termes.

Méthode.

Pour représenter les premiers termes de la suite (u_n), on procèdera ainsi :

- *On effectue l'étude de la fonction f, puis on trace sur un même graphe sa courbe représentative $\mathscr{C}_f$ ainsi que la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x$.*
- *On place u_0 sur l'axe des abscisses.*
- *À l'aide de la courbe de f, on place $u_1 = f(u_0)$ sur l'axe des ordonnées.*
- *Grâce à la droite $\mathscr{D}$, on replace u_1 sur l'axe des abscisses, puis on réitère le processus sur $u_1, \ldots$*

Exercice. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $u_0 \in \mathbb{R}_+$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{3u_n+1}$.

1. Étudier les variations sur $\mathbb{R}_+$ de la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{2x}{3x+1}$.

2. Tracer dans un même repère orthonormé la courbe représentative $\mathscr{C}_f$, la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x$ et les premiers termes de la suite (u_n) lorsque :
$$u_0 = \frac{1}{5}, \qquad u_0 = \frac{1}{3}, \qquad u_0 = 1.$$

2.2 Existence et encadrement des termes de la suite

Attention.

Une définition par récurrence n'assure pas l'existence de la suite. En effet, les termes de la suite peuvent sortir du domaine de définition de f.

Exemple. Considérons la suite définie par $u_0 = 2$ et :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \ln(u_n).$$
Elle n'est bien définie que pour ses trois premiers termes car $u_1 = \ln(2) \simeq 0,69$, $u_2 = \ln(\ln(2)) \simeq -0,36$, et donc u_3 n'existe pas car u_2 est sorti du domaine de définition du logarithme.

Pour s'assurer de l'existence de tous les termes de la suite, on choisit donc u_0 dans un intervalle stable de f :

Définition.

On dit qu'un intervalle $J \subset I$ est **stable** de f si $f(J) \subset J$, c'est-à-dire si :
$$\forall x \in J, \quad f(x) \in J.$$

Méthode.

Pour montrer qu'un intervalle J est stable par f, on pourra selon les cas :

- *soit déterminer $f(J)$ à l'aide du tableau de variation de f et vérifier que $f(J) \subset J$;*
- *soit par construction : si $J = [a, b]$ (par exemple) et si $a \leq x \leq b$, montrer que $a \leq f(x) \leq b$.*

Exercice. Montrer que $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ et $\left[\frac{1}{3}, +\infty\right[$ sont des intervalles stables par la fonction $f(x) = \dfrac{2x}{3x+1}$.

Méthode.

Pour montrer que la propriété $\mathscr{P}(n)$: "u_n existe et $u_n \in J$" est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pourra utiliser que J est stable par f et faire la récurrence suivante :

<u>Initialisation</u> : $u_0 \in J$ donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

<u>Hérédité</u> : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie et montrons $\mathscr{P}(n+1)$.
On a par hypothèse de récurrence $u_n \in J \subset \mathscr{D}_f$. Donc $u_{n+1} = f(u_n)$ existe bien. De plus, puisque J est un intervalle stable, $u_{n+1} = f(u_n) \in f(J) \subset J$. Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

<u>Conclusion</u> : Par le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini et appartient à J.

Exercice. Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 \in \mathbb{R}_+$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{3u_n+1}$.

1. Supposons que $u_0 \in \left[0, \frac{1}{3}\right]$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini et $0 \leq u_n \leq \frac{1}{3}$.

2. Supposons que $u_0 \in \left[\frac{1}{3}, +\infty\right[$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini et que $u_n \geq \frac{1}{3}$.

2.3 Variations de la suite

Cas général

Méthode.

Pour étudier les variations de la suite (u_n), on pourra tenter de comparer directement u_n et u_{n+1} pour tout $n \in \mathbb{N}$, en étudiant le signe de $u_{n+1} - u_n$.

Si jamais ce signe est trop compliqué à étudier, on pourra se rappeler que $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n$. On étudie alors la fonction $g : x \mapsto f(x) - x$ sur J et on dresse son tableau de signe.

- *Si $g(x) \geq 0$ sur J, alors quelque soit $n \in \mathbb{N}$, on a en prenant $x = u_n$ que $f(u_n) - u_n \geq 0$, c'est-à-dire $u_{n+1} \geq u_n$. La suite (u_n) est croissante.*
- *Si $g(x) \leq 0$ sur J, alors de même la suite (u_n) est décroissante.*

Exercice. Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 \in \mathbb{R}_+$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ où $f(x) = \dfrac{2x}{3x+1}$.

1. Déterminer le signe de $f(x) - x$ sur $\mathbb{R}_+$.

2. En déduire la monotonie de la suite (u_n) si $u_0 \in \left[0, \dfrac{1}{3}\right]$ et si $u_0 \in \left[\dfrac{1}{3}, +\infty\right[$.

Si la fonction f est croissante

Méthode.

Si la fonction f est croissante, on peut toujours montrer que la suite (u_n) est monotone. Pour cela :

- *On compare les deux premiers de la suite u_0 et u_1 (éventuellement à l'aide de l'étude de g).*
- *Si $u_0 \leq u_1$, alors on montre par récurrence que la propriété $\mathscr{P}(n)$: "$u_n \leq u_{n+1}$" est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

  Initialisation : $\mathscr{P}(0)$ est vraie puisque par hypothèse, $u_0 \leq u_1$.

  Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie et montrons $\mathscr{P}(n+1)$.
  Par hypothèse de récurrence, $u_n \leq u_{n+1}$. Comme f est croissante, on a $f(u_n) \leq f(u_{n+1})$, soit encore $u_{n+1} \leq u_{n+2}$. Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

  Conclusion : Par le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1}$ et (u_n) est croissante.
- *Si $u_0 \geq u_1$, alors on montre de même que (u_n) est décroissante.*

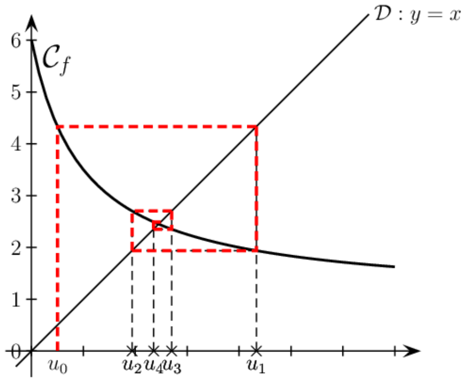
Remarque. Comme $f(x) = \dfrac{2x}{3x+1}$ est croissante, on aurait pu utiliser cette méthode pour étudier la monotonie de la suite $u_{n+1} = f(u_n)$.

Attention.

Bien que la fonction f soit croissante, la suite (u_n) ne l'est pas forcément : elle peut être croissante si $u_0 \leq u_1$, ou décroissante si $u_0 \geq u_1$.

Si la fonction f est décroissante

Dans ce cas, la suite (u_n) n'est plus monotone, comme on le constate sur le diagramme en "escargot" suivant :



En revanche, on observe que les suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) des termes pairs et impairs de (u_n) sont monotones et de monotonie contraire. Cela sera toujours le cas.

Méthode.

Si la fonction f est décroissante, alors on pose $h = f \circ f$. Puisque f est décroissante, h est croissante. De plus, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{2n+2} = f(u_{2n+1}) = f(f(u_{2n})) = h(u_{2n}) \quad \text{et} \quad u_{2n+3} = h(u_{2n+1}).$$

On est donc ramené au cas de deux suites récurrentes (u_{2n}) et (u_{2n+1}) pour une fonction croissante h. On peut donc appliquer les résultats de la section précédente :

- *si $u_0 \leq u_2$, alors en composant par f décroissante, on a $u_1 \geq u_3$: la suite (u_{2n}) est croissante et la suite (u_{2n+1}) est décroissante.*
- *si $u_0 \geq u_2$, alors de même $u_1 \leq u_3$: la suite (u_{2n}) est décroissante et la suite (u_{2n+1}) est croissante.*

Pour des exemples, voir :

☞ **Séance d'approfondissement 1 : Suites récurrentes d'ordre 1 - Suites implicites.**

2.4 Convergence de la suite

Limites finies possibles

On suppose que la suite (u_n) converge vers une **limite finie** ℓ qu'on cherche à déterminer. Pour cela, nous avons besoin de la notion de point fixe.

Définition.

On appelle **point fixe** de f toute solution de l'équation $f(x) = x$.
Graphiquement, il s'agit de l'abscisse des points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ avec la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x$.

Théorème 8 (Limites finies possibles d'une suite récurrente d'ordre 1)

Si f est **continue** sur un intervalle stable J et si (u_n) converge vers $\ell \in J$ alors $f(\ell) = \ell$, et ℓ est un point fixe de f.

Preuve.

□

Méthode.

Pour déterminer les limites finies ***possibles*** *de la suite (u_n), on cherche les points fixes de f, qui sont aussi les points d'annulation de la fonction $g : x \mapsto f(x) - x$ sur J.*

Exercice. Déterminer les limites finies possibles de la suite définie par : $u_0 \in \mathbb{R}_+$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{3u_n + 1}$.

Convergence lorsque f est croissante

Lorsque f est croissante, nous avons vu que la suite (u_n) est monotone (croissante ou décroissante). Selon que l'intervalle stable J soit bornée ou non, on pourra utiliser le théorème des suites monotones pour prouver la convergence de la suite.

Exercice. Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 \in \mathbb{R}_+$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{3u_n+1}$. Justifier la convergence de (u_n) et donner sa limite :

1. Lorsque $u_0 \in \left[0, \dfrac{1}{3}\right]$:

2. Lorsque $u_0 \in \left[\dfrac{1}{3}, +\infty\right[$:

Convergence lorsque f est décroissante

Lorsque f est décroissante, nous avons vu que (u_n) n'est pas monotone. Cependant, les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) le sont. Dans certains cas, on pourra faire le raisonnement suivant :

1. On montre que (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont convergente avec le théorème des suites monotones.
2. On montre que (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers une même limite ℓ. Dans ce cas, (u_n) converge vers ℓ.

Convergence par inégalité des accroissements finis

On peut aussi utiliser dans certains cas l'inégalité des accroissements finis pour montrer que la distance entre u_n et sa limite possible ℓ tend vers 0. On en rappelle l'énoncé :

Théorème 9 (Inégalité des accroissements finis)

Si f est **dérivable** sur J, et s'il existe $M \geq 0$ tel que pour tout $x \in J$, $|f'(x)| \leq M$, alors

$$\forall (a,b) \in J^2, \quad |f(b) - f(a)| \leq M|b-a|.$$

Méthode.

Pour montrer la convergence de (u_n) vers un point fixe $\ell \in J$ à partir de l'inégalité des accroissements finis, on procèdera ainsi :

1. *On majore $|f'|$ par une constante M sur l'intervalle stable J contenant les termes de la suite. Il faut pour que cette méthode fonctionne que $0 \leq M < 1$.*

2. *On énonce l'inégalité des accroissements finis (en rappelant les hypothèses pour qu'elle soit valable), puis on prend $b = u_n$ et $a = \ell$ (en précisant que u_n et ℓ appartiennent à J) pour obtenir :*
$$|u_{n+1} - \ell| = |f(u_n) - f(\ell)| \leq M|u_n - \ell|.$$

3. *On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathscr{P}(n)$: "$|u_n - \ell| \leq M^n|u_0 - \ell|$".*

   Initialisation : Comme $|u_0 - \ell| \leq M^0|u_0 - \ell|$, $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

   Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie et montrons $\mathscr{P}(n+1)$.
   Par hypothèse de récurrence, $|u_n - \ell| \leq M^n|u_0 - \ell|$. Alors on a :
$$|u_{n+1} - \ell| \leq M|u_n - \ell| \leq M \times M^n|u_0 - \ell| = M^{n+1}|u_0 - \ell|.$$
   Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

   Conclusion : Par le principe de récurrence, $|u_n - \ell| \leq M^n|u_0 - \ell|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4. *Si $M \in [0, 1[$, $\lim\limits_{n\to+\infty} M^n|u_0 - \ell| = 0$ donc (u_n) converge vers ℓ par encadrement.*

Exercice. Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 \in \left[\frac{1}{3}, +\infty\right[$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ où $f(x) = \dfrac{2x}{3x+1}$.

1. Montrer que : $\forall x \geq \frac{1}{3}$, $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$.

2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\left|u_{n+1} - \frac{1}{3}\right| \leq \frac{1}{2}\left|u_n - \frac{1}{3}\right|$.

3. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\left|u_n - \dfrac{1}{3}\right| \leq \dfrac{1}{2^n}\left|u_0 - \dfrac{1}{3}\right|$.

4. Retrouver $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

3 Suites implicites

Dans cette partie, nous présentons diverses méthodes pour l'étude d'une suite implicite (u_n) dont chacun des termes u_n est solution d'une équation (E_n) :

- soit du type
$$f(x) = a_n,$$
où $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction et (a_n) est une suite connue (en général sous forme explicite).
- soit du type
$$f_n(x) = 0,$$
où $f_n : I \to \mathbb{R}$ est une fonction dépendant de $n \in \mathbb{N}$.

Il n'est en général pas possible de résoudre explicitement l'équation (E_n). On ne connait donc pas la valeur de u_n. On dit que ces termes sont définis implicitement.

Comme pour les suites récurrentes d'ordre 1, aucune connaissance théorique sur les suites implicites n'est exigée en ECG. Cependant, on rencontre souvent les mêmes situations en exercice et il est utile de les connaître pour mener l'étude de ces suites correctement.

3.1 Du type $f(u_n) = a_n$

Méthode.

Pour étudier une suite implicite (u_n) du type $f(u_n) = a_n$, on pourra procéder ainsi :

1. *Pour définir $u_n \in I$ tel que $f(u_n) = a_n$:*
   - *On démontre que f réalise une bijection de I dans un intervalle J (théorème de la bijection).*
   - *On vérifie que $a_n \in J$. Dans ce cas, a_n admet un unique antécédent $u_n \in I$ par la bijection f.*
2. *Pour obtenir les variations de (u_n) :*
   - *On commence par exprimer u_n en fonction de f^{-1} et de a_n :*
   $$f(u_n) = a_n \quad \Leftrightarrow \quad u_n = f^{-1}(a_n).$$
   - *On utilise les variations de f^{-1} (qu'on déduit des variations de f) pour comparer u_n et u_{n+1} et obtenir les variations de (u_n).*
3. *Pour déterminer la limite de (u_n), on passe à la limite dans la relation $u_n = f^{-1}(a_n)$ (en obtenant les limites de f^{-1} à partir de celles de f).*
4. *Pour toutes les autres questions, il faudra utiliser la plupart du temps l'équation $f(u_n) = a_n$.*

Exercice.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'équation $x + \ln(x) = n$ admet une unique solution $u_n \in \mathbb{R}_+^*$.
2. Déterminer la monotonie de la suite (u_n).
3. Étudier la convergence de (u_n).
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $u_n \leq n$ puis $n - \ln(n) \leq u_n$.
5. En déduire que $u_n \sim n$.

3.2 Du type $f_n(u_n) = 0$

Méthode.

Pour étudier une suite implicite (u_n) du type $f_n(u_n) = 0$, on pourra procéder ainsi :

1. *Pour définir $u_n \in I$ tel que $f_n(u_n) = 0$:*
   - *On démontre que f_n réalise une bijection de I dans un intervalle J (théorème de la bijection).*
   - *On vérifie que $0 \in J$. Dans ce cas, 0 admet un unique antécédent $u_n \in I$ par la bijection f_n.*
2. *Pour obtenir les variations de (u_n) :*
   - *On étudie le signe de $f_{n+1}(x) - f_n(x)$ sur I.*
   - *On pose $x = u_n \in I$ et on en déduit le signe de $f_{n+1}(u_n)$.*
   - *On compare $f_{n+1}(u_n)$ et $f_{n+1}(u_{n+1}) = 0$ puis u_n et u_{n+1} en utilisant les variations de f_{n+1}.*
3. *Pour toutes les autres questions, il faudra utiliser la plupart du temps l'équation $f_n(u_n) = 0$.*

Exercice.

1. Soit un entier $n \geq 2$. Montrer que l'équation $x^n + 1 = nx$ admet une unique solution $u_n \in [0, 1]$.
2. (a) On pose $f_n(x) = x^n + 1 - nx$. Étudier le signe de $f_{n+1}(x) - f_n(x)$ sur $[0, 1]$.
   (b) En déduire le signe de $f_{n+1}(u_n)$, puis la monotonie de la suite (u_n).
3. (a) Justifier que : $\forall n \geq 2,\ 0 \leq u_n \leq \dfrac{2}{n}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.
   (b) Déterminer la limite de u_n^n, puis montrer que $u_n \sim \dfrac{1}{n}$.