Chapitre 2

Calcul matriciel

1 Rappels et compléments sur le calcul matriciel **2**
1.1 Opérations sur les matrices 2
1.2 Puissances d'une matrice carrée 4
1.3 Polynômes d'une matrice carrée 5
1.4 Matrices carrées inversibles 6

2 Noyau, image et rang d'une matrice **8**
2.1 Noyau d'une matrice 8
2.2 Image d'une matrice 9
2.3 Rang d'une matrice 10

3 Éléments propres d'une matrice carrée **11**
3.1 Valeurs propres 11
3.2 Sous-espaces propres 12
3.3 Recherche d'éléments propres 14

4 Réduction des matrices carrées **19**
4.1 Matrices diagonalisables 19
4.2 Pratique de la diagonalisation 22

Compétences attendues.

✓ Calculer les puissances d'une matrice carrée A à l'aide de l'une des méthodes suivantes :

- en déterminant une formule sur les puissances de A puis en la démontrant par récurrence,
- avec la formule du binôme de Newton,
- à l'aide d'un polynôme annulateur de A,
- en se ramenant aux puissances d'une matrice diagonale.

✓ Montrer qu'une matrice carrée A est ou non inversible à l'aide de l'une des méthodes suivantes :

- en faisant un produit matriciel si l'inverse est suggérée,
- à l'aide d'un polynôme annulateur de A,
- en exhibant une combinaison linéaire sur les lignes ou les colonnes de A,
- en appliquant la méthode du pivot de Gauss à A.

✓ Déterminer les valeurs propres d'une matrice carrée A à l'aide de l'une des méthodes suivantes :

- en utilisant la définition des valeurs propres si les vecteurs propres sont donnés,
- à l'aide d'un polynôme annulateur,
- en appliquant la méthode du pivot de Gauss à la matrice $A - \lambda I_n$.

✓ Déterminer les sous-espaces propres d'une matrice.

✓ Déterminer si une matrice A est diagonalisable et, si c'est le cas, expliciter une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $A = PDP^{-1}$.

Anthony Mansuy
Professeur de Mathématiques en deuxième année de CPGE filière ECG au Lycée Clemenceau (Reims)
Page personnelle : `http://anthony-mansuy.fr`
E-mail : `mansuy.anthony@hotmail.fr`

1 Rappels et compléments sur le calcul matriciel

1.1 Opérations sur les matrices

Définition.

- Une **matrice** de taille $n \times p$ à coefficients réels est un tableau de réels de n lignes et p colonnes. Si $n = p$, la matrice est dite **carrée**.
- L'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes est noté $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ (ou simplement $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ si $n = p$).

Notations.

- Si $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, on notera $[A]_{i,j}$ le coefficient de la i-ème ligne et de la j-ème colonne de A.
- On note $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ la **matrice identité**.
- On note $0_{n,p} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ la **matrice nulle**.

Définition.

Une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est dite :

- **triangulaire supérieure** si, pour tout $i > j$, $[A]_{i,j} = 0$.
- **triangulaire inférieure** si, pour tout $i < j$, $[A]_{i,j} = 0$.
- **diagonale** si, pour tout $i \neq j$, $[A]_{i,j} = 0$.

Définition.

Soient $A, B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On définit les matrices $A + B$ et $\lambda \cdot A$ de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ par :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!], \quad [A+B]_{i,j} = [A]_{i,j} + [B]_{i,j} \quad \text{et} \quad [\lambda \cdot A]_{i,j} = \lambda [A]_{i,j}.$$

Définition.

Soient $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R})$. On définit la matrice $C = A \times B$ de $\mathscr{M}_{n,q}(\mathbb{R})$ par :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,q]\!], \quad [C]_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} [A]_{i,k}[B]_{k,j}$$

Attention.

1. Pour pouvoir effectuer le produit de A par B, il faut impérativement que le nombre de colonnes de A soit égale au nombre de lignes de B.
2. On ne sait faire que des combinaisons linéaires et des produits de matrices. Il n'y a pas d'autre opération. En particulier, la division de matrices n'existe pas !

Propriété 1 (du produit matriciel)

Soient A, B, C des matrices. Dans le cas où les produits matriciels sont bien définis, on a :

- Associativité : $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$.
- Distributivité : $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$ et $(A + B) \times C = A \times C + B \times C$.
- $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda \cdot (A \times B) = (\lambda \cdot A) \times B = A \times (\lambda \cdot B)$.
- $\forall A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R}),\ I_n \times A = A \times I_p = A$ et $0_n \times A = A \times 0_p = 0_{n,p}$.

Attention.

- Le produit matriciel **n'est pas commutatif**. Par exemple,
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
On veillera donc à toujours conserver l'ordre des facteurs dans un produit de plusieurs matrices !
- Les formules habituelles de développement telles que les identités remarquables et la formule du binôme ne sont valables **que si les matrices commutent**. Par exemple, si $AB \neq BA$,
$$(A + B)^2 = (A + B)(A + B) = A^2 + AB + BA + B^2 \neq A^2 + 2AB + B^2.$$
- Un produit de deux matrices peut-être nul sans qu'aucune des matrices ne soient nulles. Par exemple,
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
- Il est possible de **factoriser** par une matrice, mais à condition qu'elle soit bien en facteur dans chacun des termes de la somme et du même côté (on parle de factorisation à gauche ou à droite par une matrice). En particulier,
$$\cancel{A^2 - 4A = A(A - 4)} \qquad \text{mais} \qquad A^2 - 4A = A \times A - A \times 4I_n = A(A - 4I_n).$$

Définition.

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. On appelle **matrice transposée** de A la matrice notée ${}^tA \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ définie par :
$$\forall (i, j) \in [\![1, p]\!] \times [\![1, n]\!], \quad [{}^tA]_{i,j} = [A]_{j,i}.$$
Autrement dit, ${}^tA$ est obtenue à partir de A par échange de ses lignes et de ses colonnes.

Exemple. ${}^t\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 5 & -4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Propriété 2 (de la transposition)

- $\forall A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R}),\ {}^t({}^tA) = A$.
- $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \forall A, B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R}),\ {}^t(\lambda \cdot A + \mu \cdot B) = \lambda \cdot {}^tA + \mu \cdot {}^tB$.
- $\forall A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R}),\ \forall B \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R}),\ {}^t(A \times B) = {}^tB \times {}^tA$.

Définition.

Une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est dite :

- **symétrique** si elle vérifie l'égalité ${}^tA = A$.
- **antisymétrique** si elle vérifie l'égalité ${}^tA = -A$.

Exemples.

- La matrice $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ est symétrique.
- La matrice $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est antisymétrique.

1.2 Puissances d'une matrice carrée

Définition.

Pour tout $p \in \mathbb{N}$ et pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on appelle **puissance p-ième** de A la matrice, notée A^p, définie par :

- Si $p = 0$, $A^0 = I_n$.
- Si $p = 1$, $A^1 = A$.
- Si $p \geq 2$, $A^p = \underbrace{A \times \ldots \times A}_{p \text{ fois}}$.

Attention.

1. Les formules sur les puissances de nombres réels non sont pas toutes valables sur les matrices :
$$A^p \times A^q = A^{p+q} \qquad \text{mais} \qquad \cancel{(A \times B)^p = A^p \times B^p}.$$
Cette dernière formule est seulement valable si A et B commutent !
2. Calculer les puissances d'une matrice n'est pas une question simple en général. En particulier, la puissance d'une matrice n'est SURTOUT pas égale à la matrice des puissances (sauf si elle est diagonale) !

Propriété 3 (Puissances d'une matrice triangulaire ou diagonale)

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice triangulaire supérieure (resp. triangulaire inférieure, resp. diagonale), dont les coefficients diagonaux sont $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a :

$$A^p = \begin{pmatrix} \lambda_1^p & & \cdots & \\ 0 & \lambda_2^p & (*) & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n^p \end{pmatrix}, \text{ resp. } \begin{pmatrix} \lambda_1^p & 0 & \cdots & 0 \\ & \lambda_2^p & \ddots & \vdots \\ \vdots & (*) & \ddots & 0 \\ & \cdots & & \lambda_n^p \end{pmatrix}, \text{ resp. } \begin{pmatrix} \lambda_1^p & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^p & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n^p \end{pmatrix}$$

où $(*)$ sont des réels.

Méthode.

Pour calculer les puissances d'une matrice carrée M, on utilisera l'une des méthodes suivantes :

- ***Par récurrence*** *: En calculant les premières puissances de M, on obtient une formule générale qui semble être valable pour tout entier naturel. On démontre alors cette formule par récurrence.*
- ***Avec la formule du binôme de Newton*** *: On écrit $M = A+B$ où A et B sont deux matrices qui* ***commutent*** *(c'est-à-dire telles que $AB = BA$) et dont les puissances sont plus simples à calculer. On utilise alors la formule :*

$$M^p = (A+B)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k B^{p-k} = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} B^k A^{p-k}.$$

- ***En se ramenant aux puissances d'une matrice diagonale*** *: On écrit $M = PDP^{-1}$ avec D une matrice diagonale, on démontre par récurrence que, pour tout entier naturel k, $M^k = PD^kP^{-1}$ et on obtient finalement M^p en faisant le produit matriciel.*

1.3 Polynômes d'une matrice carrée

Définition.

Soit $P(X) = a_dX^d + a_{d-1}X^{d-1} + \ldots + a_1X + a_0 \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée. On note $P(A)$ la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$P(A) = a_dA^d + a_{d-1}A^{d-1} + \ldots + a_1A + a_0I_n.$$

Exemple. Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $P(X) = X^2 + 3X - 10$. Alors $P(A) = A^2 + 3A - 10I_n$.

Attention.

Le terme constant a_0 dans $P(X)$ devient a_0I_n dans $P(A)$.

Propriété 4 (Polynôme d'une matrice carrée)

Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors :

$$(\lambda P + \mu Q)(A) = \lambda P(A) + \mu Q(A) \qquad \text{et} \qquad (P \times Q)(A) = P(A) \times Q(A).$$

Remarque. Il est important de bien identifier les objets mathématiques concernés :

$$(\underbrace{P \times Q}_{\text{produit de polynômes}})(A) = \underbrace{P(A) \times Q(A)}_{\text{produit de matrices}}.$$

Exemple. Comme $P(X) = X^2 + 3X - 10 = (X+5)(X-2)$, on a $P(A) = (A+5I_n)(A-2I_n)$.

Propriété 5 (Commutativité des polynômes d'une matrice carrée)

Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Les matrices $P(A)$ et $Q(A)$ commutent :

$$P(A) \times Q(A) = Q(A) \times P(A).$$

En particulier, A commute avec toutes ses puissances et avec tous les polynômes en A.

Preuve.

□

Définition.

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée.
On dit que P est un **polynôme annulateur** de A si $P(A) = 0$.

Méthode.

La connaissance d'un polynôme annulateur $P \in \mathbb{R}_d[X]$ d'une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ peut permettre de calculer la puissance k-ième de A :

- *A l'aide d'une division euclidienne de X^k par P ;*
- *Par récurrence en écrivant A^k comme combinaison linéaire de $I_n, A, \ldots, A^{d-1}$.*

1.4 Matrices carrées inversibles

Définition.

Une matrice carrée $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est dite **inversible** s'il existe $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$A \times B = B \times A = I_n.$$

Une telle matrice B est alors unique. On l'appelle l'**inverse** de A et on la note A^{-1}.

Remarques. Si A est **inversible**, il est possible de **simplifier les égalités** qui contiennent A en facteur :

- Si $AC = AD$, on a en multipliant par A^{-1} à gauche :

$$AC = AD \quad \Rightarrow \quad A^{-1}(AC) = A^{-1}(AD) \quad \Rightarrow \quad \underbrace{(A^{-1}A)}_{=I_n} C = \underbrace{(A^{-1}A)}_{=I_n} D \quad \Rightarrow \quad C = D.$$

- Si $CA = DA$, on a en multipliant par A^{-1} à droite :

$$CA = DA \quad \Rightarrow \quad (CA)A^{-1} = (DA)A^{-1} \quad \Rightarrow \quad C \underbrace{(AA^{-1})}_{=I_n} = D \underbrace{(AA^{-1})}_{=I_n} \quad \Rightarrow \quad C = D.$$

Attention à bien distinguer droite et gauche puisque le produit n'est pas commutatif.

Théorème 6 (Caractérisations des matrices inversibles)

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(1) A est une matrice inversible ;

(2) Il existe $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $B \times A = I_n$ (et alors $A^{-1} = B$) ;

(3) Il existe $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A \times B = I_n$ (et alors $A^{-1} = B$) ;

(4) Les colonnes (ou les lignes) de A sont linéairement indépendantes ;

(5) $\forall B \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, le système $AX = B$ admet une unique solution (qui est $X = A^{-1}B$).

Propriété 7 (Inverse d'une matrice triangulaire ou diagonale)

(1) Une matrice triangulaire est inversible si et seulement si tous ses coefficients diagonaux sont non nuls.

(2) En particulier, une matrice diagonale $D = \text{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ est inversible si et seulement si $\lambda_i \neq 0$ pour tout $1 \leq i \leq n$, et on a alors $D^{-1} = \text{diag}(\frac{1}{\lambda_1}, \ldots, \frac{1}{\lambda_n})$.

Exemples.

- La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ est inversible car elle est triangulaire supérieure et que tous ses coefficients diagonaux $1, -1, 2$ sont non nuls.
- La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ est non inversible, car elle est triangulaire inférieure et que l'un de ses coefficients diagonaux est nul.

Propriété 8 (Déterminant d'une matrice carrée de taille 2)

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice carrée de taille 2. En notant $\det(A)$ la quantité $ad - bc$, appelée **déterminant** de A, on a alors :

(1) A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$.

(2) Dans ce cas, $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Exemples.

- La matrice $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible car elle est de taille 2 et son déterminant est nul.
- La matrice $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible car elle est de taille 2 et son déterminant est non nul (égal à 2).

  Sa matrice inverse est égale à $\dfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Méthode.
Voici différentes méthodes pour montrer qu'une matrice carrée $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible :

- ***Si on nous suggère l'inverse*** *: Il suffit de faire le produit des deux matrices.*
- ***Si on a trouvé un polynôme annulateur P de A*** *:*
  - *Si $P(0) \neq 0$, alors A est inversible. Pour le prouver, on met l'équation $P(A) = 0$ sous la forme $A \times B = I_n$ (et $A^{-1} = B$ est un polynôme en A).*
  - *Si $P(0) = 0$, alors A n'est en général pas inversible. Pour le prouver, on raisonne par l'absurde : on met l'équation $P(A) = 0$ sous la forme $A \times B = 0$, puis on multiplie par A^{-1} à gauche pour aboutir à une contradiction.*
- ***Si on veut montrer que A n'est pas inversible*** *: On vérifie si l'une des colonnes (ou des lignes) de A est combinaison linéaire des autres colonnes (ou lignes).*
- ***Si la matrice carrée A est de taille 2*** *: On calcule le déterminant de A.*
- ***Dans le cas général*** *: On applique la méthode du pivot de Gauss.*

Propriété 9 (de l'inverse)

(1) Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible, alors A^{-1} l'est aussi et $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$.

(2) Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible, alors ${}^tA$ l'est aussi et $\left({}^tA\right)^{-1} = {}^t\left(A^{-1}\right)$.

(3) Si $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ sont inversibles, alors $A \times B$ l'est aussi et $(A \times B)^{-1} = B^{-1} \times A^{-1}$.

Remarque. On peut déduire de cette dernière propriété que :

- Si $A_1, \dots, A_k \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ sont inversibles, alors $A_1 \dots A_k$ l'est aussi et $(A_1 \dots A_k)^{-1} = A_k^{-1} \dots A_1^{-1}$.
- Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible, alors A^p l'est aussi et $(A^p)^{-1} = (A^{-1})^p$. On peut définir dans ce cas les puissances entières strictement négatives de A par :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \ A^{-p} = (A^p)^{-1} = (A^{-1})^p.$$

2 Noyau, image et rang d'une matrice

2.1 Noyau d'une matrice

Définition.
On appelle **noyau** d'une matrice $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, et on note $\text{Ker}(A)$, l'ensemble :

$$\text{Ker}(A) = \{X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \mid A \cdot X = 0_{n,1}\}.$$

Propriété 10 (Noyau d'une matrice)

Si $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, alors $\text{Ker}(A)$ est un **sous-espace vectoriel** de $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$.

Méthode.
Pour déterminer $\text{Ker}(A)$, on résout le système linéaire $A \cdot X = 0$ puis on donne l'ensemble des solutions sous la forme d'un sous-espace vectoriel engendré par une base.

Exercice. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix}$. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(A)$.

2.2 Image d'une matrice

Définition.

On appelle **image** d'une matrice $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, et on note $\mathrm{Im}(A)$, l'ensemble :

$$\mathrm{Im}(A) = \{Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mid \exists X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R}),\ Y = A \cdot X\}.$$

Propriété 11 (Image d'une matrice)

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

(1) $\mathrm{Im}(A)$ est un **sous-espace vectoriel** de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

(2) $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Vect}(C_1, \dots, C_p)$ où C_i est la i-ième colonne de A.

Méthode.

Pour déterminer Im(A), on utilise l'égalité Im(A) = Vect($C_1, \dots, C_p$) puis on détermine une base de ce sous-espace vectoriel engendré.

Exercice. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix}$. Déterminer une base de $\mathrm{Im}(A)$.

2.3 Rang d'une matrice

Définition.

Le **rang** d'une matrice $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, noté $\text{rg}(A)$, est la dimension du sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs colonnes de A. Autrement dit :

$$\text{rg}(A) = \dim(\text{Im}(A)).$$

Exemple.

- La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$ est de rang 1 : en effet, toutes ses colonnes sont proportionnelles.
- Le rang de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix}$ est 2 puisque $\text{Im}(A)$ est de dimension 2.

Propriété 12 (Rang d'une matrice)

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

(1) On a :
$$\text{rg}({}^tA) = \text{rg}(A).$$
Autrement dit, le rang d'une matrice est aussi la dimension du sous-espace vectoriel engendré par ses vecteurs lignes.

(2) Théorème du rang :
$$p = \dim(\text{Ker}(A)) + \text{rg}(A).$$

Propriété 13 (Rang et opérations élémentaires sur les lignes)

(1) Le rang d'une matrice A est invariant lorsqu'on effectue des opérations élémentaires sur les lignes de A.

(2) Le rang d'une matrice échelonnée A est égal au nombre de ses pivots non nuls.

Méthode.

Pour calculer le rang d'une matrice A, on échelonne la matrice par la méthode du pivot de Gauss. Le rang de A est alors le nombre de pivots non nuls de la matrice échelonnée obtenue.

Exercice. Déterminer le rang de la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Propriété 14 (Caractérisation des matrices inversibles)

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Alors :

$$A \text{ inversible} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Ker}(A) = \{0_{n,1}\} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Im}(A) = \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{rg}(A) = n.$$

3 Éléments propres d'une matrice carrée

3.1 Valeurs propres

Définition.

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On dit que λ est une **valeur propre** de A lorsque :
$$\exists X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{n,1}\},\ AX = \lambda X.$$
- On dit qu'un vecteur colonne **non nul** $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est un **vecteur propre** de A associé à la valeur propre λ si :
$$AX = \lambda X.$$
- On appelle **spectre** de A et on note $\mathrm{Sp}(A)$ l'ensemble des valeurs propres de A.

Exercice. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et les vecteurs $X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Montrer que X_1 et X_2 sont des vecteurs propres de A et déterminer les valeurs propres associées.

Théorème 15 (Caractérisation des valeurs propres)

On a les équivalences :

$$\begin{aligned} \lambda \in \mathrm{Sp}(A) \quad & \Leftrightarrow \quad \dim(\mathrm{Ker}(A - \lambda I_n)) \geq 1 \\ & \Leftrightarrow \quad \mathrm{rg}(A - \lambda I_n) < n \\ & \Leftrightarrow \quad (A - \lambda I_n) \text{ n'est pas inversible.} \end{aligned}$$

Preuve.

□

Propriété 16 (Cas particulier : la valeur propre 0)

On a les équivalences :

$$0 \in \mathrm{Sp}(A) \quad \Leftrightarrow \quad \dim(\mathrm{Ker}(A)) \geq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{rg}(A) < n \quad \Leftrightarrow \quad A \text{ n'est pas inversible.}$$

3.2 Sous-espaces propres

Définition.

Si λ est une valeur propre d'une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on appelle **sous-espace propre** de A associé à la valeur propre λ, et on note $E_\lambda(A)$, le sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ défini par :

$$E_\lambda(A) = \{X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mid AX = \lambda X\} = \mathrm{Ker}(A - \lambda I_n).$$

$E_\lambda(A)$ est ainsi constitué de tous les vecteurs propres associés à λ et du vecteur nul $0_{n,1}$.

Remarque. D'après le théorème du rang, on a pour toute valeur propre λ d'une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$:

$$\dim(E_\lambda(A)) = n - \mathrm{rg}(A - \lambda I_n)$$

En particulier, si 0 est valeur propre de A, $\dim(E_0(A)) = \dim(\mathrm{Ker}(A)) = n - \mathrm{rg}(A)$.

Théorème 17 (Concaténation de familles libres de sous-espaces propres)

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ des valeurs propres **deux à deux distinctes** d'une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Si $\mathscr{L}_1$ est une famille libre de $E_{\lambda_1}(A)$, $\mathscr{L}_2$ est une famille libre de $E_{\lambda_2}(A)$, ... , $\mathscr{L}_p$ est une famille libre de $E_{\lambda_p}(A)$, alors la famille $\mathscr{L}$ obtenue en concaténant (c'est-à-dire en juxtaposant) les familles $\mathscr{L}_1, \mathscr{L}_2, \ldots, \mathscr{L}_p$ est libre.

Preuve.

$\square$

Propriété 18 (Nombre de valeurs propres)

Une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ possède au plus n valeurs propres distinctes.

Preuve.

$\square$

3.3 Recherche d'éléments propres

Déterminer les **éléments propres** d'une matrice, c'est déterminer :

- toutes ses valeurs propres ;
- le sous-espace propre associé à chacune des valeurs propres (souvent en donnant une base de ce sous-espace vectoriel).

Valeurs propres d'une matrice triangulaire

Propriété 19 (Valeurs propres d'une matrice triangulaire)

Si A est une matrice triangulaire, alors ses valeurs propres sont exactement ses coefficients diagonaux.

Preuve.

$\square$

Exemple. Les valeurs propres de $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ sont $-2, 0, 5$.

Recherche des valeurs propres d'une matrice carrée de taille 2

Propriété 20 (Valeurs propres d'une matrice carrée de taille 2)

Soit $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. On a l'équivalence :

$$\lambda \in \mathrm{Sp}(A) \quad \Leftrightarrow \quad \det(A - \lambda I_2) = 0.$$

Preuve.

$\square$

Méthode.
Pour déterminer les valeurs propres d'une matrice $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, on calcule le déterminant de la matrice $A - \lambda I_2$ puis on détermine les racines du polynôme du second degré en λ ainsi obtenu.

Exercice. Déterminer les valeurs propres des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Recherche des valeurs propres à l'aide d'un polynôme annulateur

Propriété 21 (Valeurs propres et polynôme annulateur)

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme annulateur de $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
Alors les valeurs propres de A sont **parmi** les racines de P.

Preuve.

$\square$

Attention.

Si P est un polynôme annulateur de A,

$$\lambda \text{ est une racine de } P \quad \not\Longrightarrow \quad \lambda \text{ est une valeur propre de } A.$$

Par exemple, $P(X) = X(X-1)$ est un polynôme annulateur de I_n, 0 est racine de P et n'est pas valeur propre de I_n.

Exercice. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 et en déduire un polynôme annulateur de A.

2. En déduire le spectre de A.

Recherche des valeurs propres dans le cas général

Méthode.

En dernier recours, et ***seulement si toutes les méthodes précédentes n'aboutissent pas****, on procèdera comme suit pour déterminer les valeurs propres d'une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$:*

1. *On applique l'algorithme du pivot de Gauss à la matrice $A-\lambda I_n$ pour obtenir une matrice triangulaire supérieure T_λ.*
2. *λ est valeur propre de A si et seulement si l'un des coefficients diagonaux de T_λ est nul, c'est-à-dire si l'un des pivots est nul (argument à redonner à chaque fois). On est donc ramené à la résolution d'équations polynômiales.*

Exercice. Déterminer les valeurs propres des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 2 & -1 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Recherche des sous-espaces propres

Méthode.

Pour déterminer le sous-espace propre $E_\lambda(A)$ d'une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on doit résoudre l'équation $(A - \lambda I_n)X = 0$ d'inconnue le vecteur colonne X.

1. *Si on a déjà triangularisé la matrice $A - \lambda I_n$ en une matrice triangulaire supérieure T_λ, alors l'équation $(A - \lambda I_n)X = 0$ est équivalente à l'équation plus simple $T_\lambda X = 0$. On résout donc directement cette dernière équation.*

2. *Si ce n'est pas encore fait, on applique l'algorithme du pivot de Gauss pour résoudre l'équation $(A - \lambda I_n)X = 0$.*

On écrit alors $E_\lambda(A)$ sous la forme d'un sous-espace vectoriel engendré puis on en détermine une base.

Exercice. Déterminer une base des sous-espaces propres des matrices précédentes.

4 Réduction des matrices carrées

4.1 Matrices diagonalisables

Définition.

On dit que $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est **diagonalisable** s'il existe une matrice diagonale $D \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et une matrice inversible $P \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que :

$$A = PDP^{-1}.$$

Théorème 22 (Condition nécessaire et suffisante de diagonalisabilité)

Une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable si et seulement si il existe une base de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de A.

Dans ce cas, $A = PDP^{-1}$ avec :

- $P \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible dont les colonnes sont les vecteurs propres de A ;
- $D \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de A.

Preuve.

$\square$

Exercice. Déterminer si les matrices suivantes sont diagonalisables, et donner (si c'est le cas) les matrices P inversible et D diagonale associées.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 2 & -1 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Propriété 23 (Cas particulier d'une unique valeur propre)

Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ admet une unique valeur propre $\lambda \in \mathbb{R}$, alors on a :

$$A \text{ est diagonalisable} \quad \Leftrightarrow \quad A = \lambda I_n.$$

Preuve.

□

Exercice. La matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

Théorème 24 (Cas particulier des matrices symétriques)

Toute matrice symétrique est diagonalisable.

Remarque. Ce théorème sert uniquement à répondre à une question du type "justifier sans calcul que A est diagonalisable".

4.2 Pratique de la diagonalisation

Méthode.

Pour montrer qu'une matrice A est diagonalisable, on procèdera de la façon suivante :

1. *Si la matrice A est symétrique, alors A est diagonalisable.*
2. *Sinon, il faut déterminer les valeurs propres de A :*
   - *Si A ne possède aucune valeur propre, alors A n'est pas diagonalisable.*
   - *Si A possède une seule valeur propre, alors on raisonne par l'absurde pour montrer que A n'est pas diagonalisable (sauf si $A = \lambda I_n$).*
   - *Si A possède p valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ (avec $1 < p \leq n$), on détermine une base $\mathscr{B}_i$ de chacun de ses sous-espaces propres $E_{\lambda_i}(A)$ pour $i \in [\![1, p]\!]$.*
     La matrice A est diagonalisable si et seulement si la concaténation des bases de ses sous-espaces propres $\mathscr{B} = \bigcup_{i=1}^{n} \mathscr{B}_i$ est une base de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Exercice. Montrer que $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & -6 \\ -3 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ est diagonalisable.

Méthode.

Supposons que $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable. Pour expliciter les matrices D et $P \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que D est diagonale, P est inversible et $A = PDP^{-1}$:

- *Pour la matrice D :*

  C'est la matrice diagonale avec sur sa diagonale les valeurs propres λ_i de A apparaissant $\dim(E_{\lambda_i}(A))$ fois.

- *Pour la matrice P :*

  Comme A est diagonalisable, la famille $\mathscr{B} = \displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} \mathscr{B}_i$, obtenue par concaténation des bases des $E_{\lambda_i}(A)$, est une base de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. P est alors la matrice de passage de la base canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ à la base $\mathscr{B}$.

Attention à l'ordre : il faut placer les vecteurs de la base $\mathscr{B}$ dans P dans le même ordre que les valeurs propres auxquelles ils sont associés dans D.

Remarque. Supposons qu'on ait importé sur `Python` la librairie `numpy.linalg` avec le raccourci `al`. Si A est diagonalisable, la commande

```
Sp, VP = al.eig(A)
```

affecte à la variable :

- `Sp` (pour "spectre") un vecteur de n composantes contenant les valeurs propres de A ;
- `VP` (pour "vecteurs propres") une matrice carrée d'ordre n dont les colonnes sont des vecteurs propres associés.

Exercice. Reprendre l'exercice précédent et déterminer une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que $A = PDP^{-1}$.